Jeu de fête foraine

Bac S 2005 Antilles-Guyane (ancien programme) · Exercice 4 **5,5 points** **Durée conseillée 1 h 05**

1.1 Exprimer et calculer l'énergie potentielle élastique $E_{pe}(A')$ acquise par le ressort une fois comprimé (deux chiffres significatifs).

Données utiles $k = 25\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}$; $x_{A'} = -10\ \text{cm} = -0{,}10\ \text{m}$

Le ressort est au repos quand son extrémité est en O ($x = 0$) : sa déformation en A' vaut $x_{A'}$.

$$E_{pe}(A') = \frac{1}{2}\,k\,x_{A'}^2 = \frac{1}{2}\times 25\times(-0{,}10)^2 = 12{,}5\times 1{,}0\times 10^{-2} = 0{,}125\ \text{J}$$

$$\boxed{E_{pe}(A') = \frac{1}{2}\,k\,x_{A'}^2 \approx 0{,}13\ \text{J}}$$

PIÈGE
Laisser $x_{A'}$ en centimètres : on trouverait $1\,250$ au lieu de $0{,}125$ J. La raideur est en $\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$, la longueur doit être en mètres.

COMPRENDRE
L'énergie potentielle élastique d'un ressort n'est plus au programme de la spécialité actuelle : son expression serait fournie. Deux chiffres significatifs sont demandés, comme pour k : $0{,}125$ s'arrondit à $0{,}13$ J.

1.2 Quelle forme d'énergie acquiert la bille lors de la détente du ressort ? Donner son expression littérale en précisant les unités.

Poussée par le cylindre, la bille prend de la vitesse : elle acquiert de l'**énergie cinétique**.

$\boxed{E_c = \frac{1}{2}\,m\,v^2}$, avec E_c en joules (J), m en kilogrammes (kg) et v en mètres par seconde ($\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$).

1.3 Donner l'expression littérale de l'énergie mécanique du système {ressort – bille}.

L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique et des énergies potentielles. Le ressort a une masse négligeable (pas d'énergie cinétique) et l'énergie potentielle de pesanteur est prise nulle.

$$\boxed{E_m = E_c + E_{pe} = \frac{1}{2}\,m\,v^2 + \frac{1}{2}\,k\,x^2}$$

1.4 Que peut-on dire de l'énergie mécanique sachant que les frottements sont négligeables ?

Sans frottement, aucune force non conservative ne travaille : le poids et la réaction du plan sont perpendiculaires au déplacement.

L'énergie mécanique du système {ressort – bille} **se conserve** : E_m est constante pendant la détente.

1.5 Quelle est la valeur de l'énergie cinétique de la bille arrivée au point O ? Justifier la réponse.

Données utiles $E_{pe}(A') = 0{,}125$ J (1.1)

En A', la bille est immobile : $E_c(A') = 0$, donc $E_m(A') = E_{pe}(A')$.

En O, le ressort a retrouvé sa longueur au repos ($x = 0$) : $E_{pe}(O) = 0$, donc $E_m(O) = E_c(O)$.

Conservation de l'énergie mécanique : $E_m(O) = E_m(A')$.

$$\boxed{E_c(O) = E_{pe}(A') = 0{,}125\ \text{J} \approx 0{,}13\ \text{J}}$$

COMPRENDRE
Toute l'énergie stockée dans le ressort est transférée à la bille : c'est une conversion intégrale d'énergie potentielle élastique en énergie cinétique.

1.6 Déduire l'expression littérale de la vitesse v. Calculer la valeur de la vitesse v_O de la bille au point O.

Données utiles $E_c(O) = 0{,}125$ J (1.5) ; $m = 10$ g $= 1{,}0 \times 10^{-2}$ kg

$E_c = \dfrac{1}{2} m v^2$ donne $v = \sqrt{\dfrac{2 E_c}{m}}$.

$$v_O = \sqrt{\frac{2 \times 0{,}125}{1{,}0 \times 10^{-2}}} = \sqrt{\frac{0{,}25}{1{,}0 \times 10^{-2}}} = \sqrt{25}$$

$$\boxed{v_O = \sqrt{\frac{2 E_c(O)}{m}} = 5{,}0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

PIÈGE
Garder la masse en grammes, ou reprendre la valeur arrondie $0{,}13$ J : sans calculatrice, c'est $0{,}125$ J qui donne la racine exacte $\sqrt{25}$.

MÉTHODE
On peut aussi écrire directement $\dfrac{1}{2} m v_O^2 = \dfrac{1}{2} k x_{A'}^2$, soit $v_O = |x_{A'}| \sqrt{\dfrac{k}{m}} = 0{,}10 \times \sqrt{2\,500} = 5{,}0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

1.7 La vitesse de la bille en C est-elle égale à la vitesse v_O ? Justifier la réponse.

Après O, le cylindre est arrêté par la butée : le ressort n'agit plus sur la bille. Entre O et C, elle n'est soumise qu'à son poids et à la réaction du plan, perpendiculaires au déplacement, sans frottement. Son énergie mécanique se conserve et son énergie potentielle de pesanteur reste nulle (plan horizontal), donc $E_c(C) = E_c(O)$.

Oui : $v_C = v_O = 5{,}0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (mouvement rectiligne uniforme entre O et C).

COMPRENDRE
On peut aussi invoquer le principe d'inertie : les deux forces se compensent, donc le mouvement est rectiligne uniforme. La valeur est confirmée par l'énoncé de la partie 2.

2.1 Établir l'expression vectorielle de l'accélération de la bille à partir du bilan des forces.

Système {bille}, de masse m ; référentiel terrestre supposé galiléen.

Bilan des forces après C : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ seulement (frottements négligés, plus de contact avec le plan).

Deuxième loi de Newton : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a}$, soit $m\vec{g} = m\vec{a}$.

$$\boxed{\vec{a} = \vec{g}}$$

COMPRENDRE
La masse se simplifie : l'accélération d'une chute libre ne dépend pas de l'objet. Le vecteur $\vec{a}$ est vertical, vers le bas, de valeur g.

2.2 Donner les composantes du vecteur accélération dans le repère orthonormé (D, X, Y).

Données utiles $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$; axe (DY) vertical orienté vers le haut

$\vec{g}$ est vertical et dirigé vers le bas, donc opposé à $\vec{j}$: $\vec{a} = -g\vec{j}$.

$$\boxed{a_X = 0 \text{ et } a_Y = -g = -10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}$$

2.3 Établir les équations horaires littérales $X(t)$ et $Y(t)$ du mouvement.

Données utiles à $t = 0$: bille en C $(0\ ;\ Y_C)$, vitesse $\vec{v}_C$ horizontale de coordonnées $(v_C\ ;\ 0)$

$\vec{a} = \dfrac{\text{d}\vec{v}}{\text{d}t}$: on cherche les primitives de $a_X = 0$ et $a_Y = -g$, soit $v_X = C_1$ et $v_Y = -g\,t + C_2$.

À $t = 0$, $\vec{v} = \vec{v}_C$: $C_1 = v_C$ et $C_2 = 0$, donc $v_X = v_C$ et $v_Y = -g\,t$.

$\vec{v} = \dfrac{\text{d}\overrightarrow{DM}}{\text{d}t}$: $X = v_C\,t + C_3$ et $Y = -\dfrac{1}{2} g\,t^2 + C_4$.

À $t = 0$, la bille est en C : $C_3 = 0$ et $C_4 = Y_C$.

$$\boxed{X(t) = v_C\,t \text{ et } Y(t) = -\frac{1}{2} g\,t^2 + Y_C}$$

PIÈGE
Oublier la constante Y_C : l'origine du repère est D, au sol, et non C. La bille part de la hauteur $Y_C = 0{,}05$ m.

MÉTHODE
Deux intégrations successives, chacune suivie de la détermination des constantes par les conditions initiales (vitesse à $t = 0$, puis position à $t = 0$).

2.4 Déterminer les expressions littérale et numérique de l'équation $Y(X)$ de la trajectoire de la bille.

Données utiles $g = 10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; $v_C = 5{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $Y_C = 0{,}05\ \text{m}$

On élimine le temps : $X = v_C\, t$ donne $t = \dfrac{X}{v_C}$, que l'on reporte dans $Y(t)$:

$$Y(X) = -\frac{g}{2\,v_C^2}\,X^2 + Y_C$$

Application numérique : $\dfrac{g}{2\,v_C^2} = \dfrac{10}{2\times 5{,}0^2} = \dfrac{10}{50} = 0{,}20\ \text{m}^{-1}$.

$$\boxed{Y(X) = -\frac{g}{2\,v_C^2}\,X^2 + Y_C = -0{,}20\,X^2 + 0{,}05 \ (X \text{ et } Y \text{ en mètres})}$$

COMPRENDRE
La trajectoire est un arc de parabole dont le sommet est le point C, puisque la vitesse initiale est horizontale.

2.5 En déduire l'abscisse du trou dans lequel tombe la bille.

Données utiles $Y(X) = -0{,}20\,X^2 + 0{,}05$ (2.4) ; trous E $(0{,}25\ ;\ 0)$, F $(0{,}50\ ;\ 0)$, G $(0{,}75\ ;\ 0)$

La bille atteint le sol quand $Y = 0$:

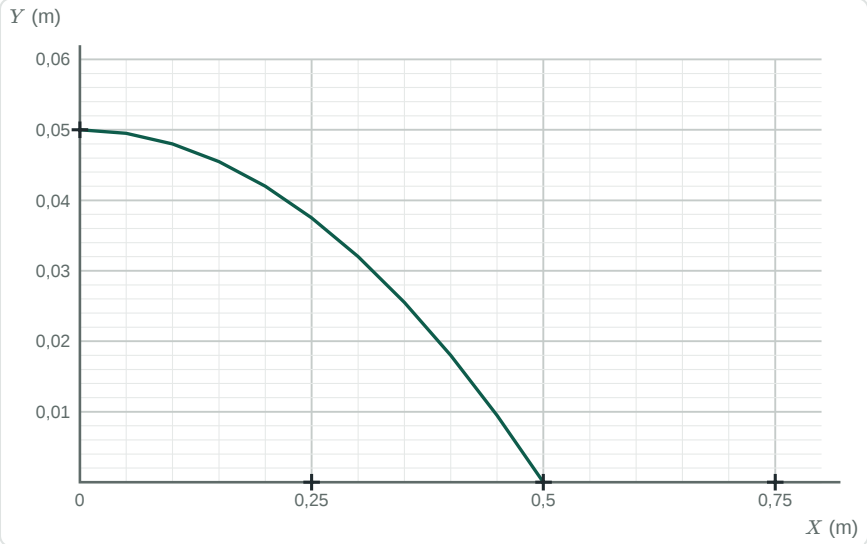
$$-0{,}20\,X^2 + 0{,}05 = 0 \quad \text{soit} \quad X^2 = \frac{0{,}05}{0{,}20} = 0{,}25$$

Donc $X = \pm\sqrt{25\times 10^{-2}} = \pm 0{,}50\ \text{m}$.

La bille part vers les X positifs : seule la solution positive convient.

$$\boxed{X = 0{,}50\ \text{m} \text{ : la bille tombe dans le } \textbf{trou F}.}$$

COMPRENDRE
Vérification par la durée de chute : $Y = 0$ pour $t = \sqrt{\dfrac{2\,Y_C}{g}} = 0{,}10$ s, et $X = v_C\, t = 5{,}0\times 0{,}10 = 0{,}50$ m.



2.5 · Trajectoire de la bille entre C et le sol