Thermomètre de Galilée

Bac S 2006 Amérique du Sud (ancien programme) · Exercice 3 **5 points** **Durée conseillée 1 h 05**

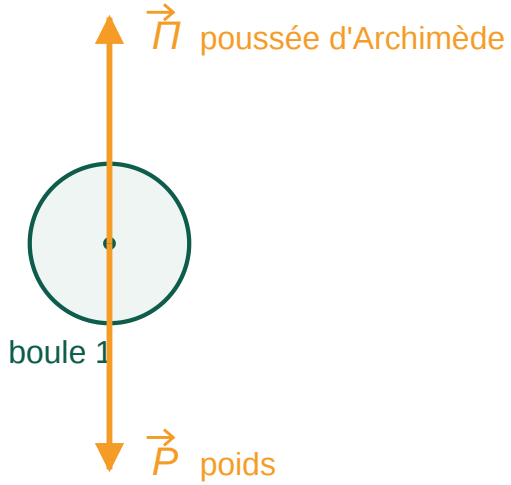
1.1 Faire l'inventaire des forces qui s'exercent sur la boule 1, immobile dans l'huile, et les représenter sur un schéma sans souci d'échelle.

Système : la boule 1 ; référentiel : l'éprouvette (terrestre, supposé galiléen). Deux forces s'exercent sur elle :

- son poids $\vec{P}$, vertical, dirigé vers le bas ;
- la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$ exercée par l'huile, verticale, dirigée vers le haut.

Deux forces verticales de sens opposés : le poids $\vec{P}$ et la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$.

PIÈGE
Ajouter une force de frottement. La boule est immobile : un frottement fluide, proportionnel à la vitesse, est nul. À l'équilibre, les deux flèches ont la même longueur.



1.1 · Boule 1 en équilibre : deux forces opposées de même valeur

1.2 Exprimer ces forces en fonction de ρ, $\rho_\ell(T)$, V_b et g.

La masse de la boule est $m = \rho\, V_b$, donc $P = m\, g = \rho\, V_b\, g$.

La poussée d'Archimède a pour valeur le poids du volume de liquide déplacé. La boule est entièrement immergée : ce volume est V_b, de masse $\rho_\ell(T)\, V_b$.

$$P = \rho\, V_b\, g \quad \text{et} \quad \Pi = \rho_\ell(T)\, V_b\, g$$

PIÈGE
Mettre la masse volumique de la boule dans la poussée d'Archimède. C'est celle du **liquide** déplacé qui intervient ; celle de la boule n'apparaît que dans le poids.

1.3 Établir l'expression littérale de la masse volumique ρ que doit avoir la boule 1 pour rester immobile.

La boule est immobile dans un référentiel galiléen : d'après le principe d'inertie, $\vec{P} + \vec{\Pi} = \vec{0}$. Les deux forces ont donc la même valeur :

$$\rho\, V_b\, g = \rho_\ell(T)\, V_b\, g$$

En simplifiant par $V_b\, g$:

$\rho = \rho_\ell(T)$: la boule 1 a la même masse volumique que le liquide.

COMPRENDRE
Le volume et g disparaissent : seule la comparaison des masses volumiques décide si un corps immergé monte, descend ou reste en place.

1.4 Expliquer pourquoi, hormis la boule 1, les boules restent les unes en haut de la colonne, les autres en bas.

Toutes les boules ont le même volume V_b : elles subissent la même poussée $\Pi = \rho_\ell(T)\, V_b\, g$. Leurs poids $P = \rho\, V_b\, g$ diffèrent.

- Si $\rho > \rho_\ell(T)$, alors $P > \Pi$: la boule descend et repose au fond.
- Si $\rho < \rho_\ell(T)$, alors $P < \Pi$: la boule monte et flotte en haut.

Les boules plus denses que le liquide sont en bas, les boules moins denses sont en haut.

1.5 Lorsque la température du liquide s'élève, la boule 1 se met en mouvement. Justifier dans quel sens.

Quand la température augmente, $\rho_\ell(T)$ diminue, donc la poussée $\Pi = \rho_\ell(T)\, V_b\, g$ diminue. La masse volumique ρ et le volume de la boule ne changent pas : son poids reste le même.

On a alors $\rho > \rho_\ell(T)$, soit $P > \Pi$: la résultante des forces est dirigée vers le bas.

La boule 1 descend vers le bas de la colonne.

COMPRENDRE
C'est le principe du thermomètre : à chaque degré gagné, une boule de plus coule. La température se lit sur la plus basse des boules restées en haut.

2.1 Représenter sur un schéma, sans souci d'échelle mais de façon cohérente, les forces qui s'exercent sur la boule en mouvement.

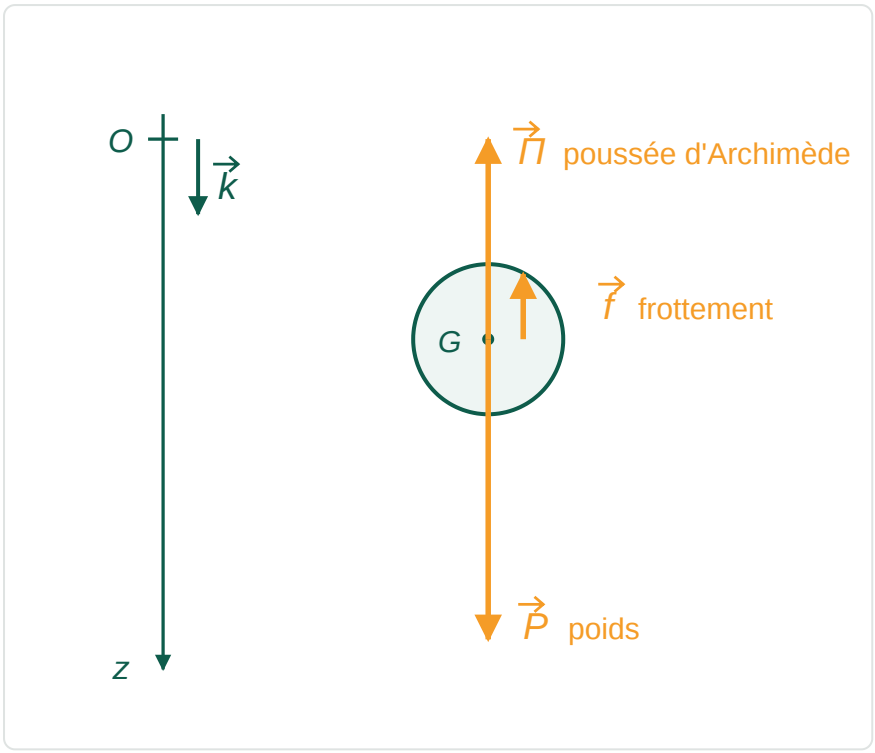
La boule descend. Trois forces verticales s'exercent sur elle :

- le poids $\vec{P}$, vers le bas ;
- la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$, vers le haut ;
- le frottement fluide $\vec{f}$, opposé à la vitesse, donc vers le haut.

La boule part du repos et sa vitesse augmente vers le bas : $P > \Pi + f$.

$\vec{P}$ vers le bas, $\vec{\Pi}$ et $\vec{f}$ vers le haut, avec $P > \Pi + f$.

PIÈGE
« De façon cohérente » : la flèche du poids doit être plus longue que celles de $\vec{\Pi}$ et $\vec{f}$ mises bout à bout, sinon le schéma contredit la descente accélérée.



2.1 · Boule en descente : la flèche du poids est plus longue que les deux autres réunies

2.2 Avec la deuxième loi de Newton, montrer que $v(t)$ vérifie $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = A - B\,v$ et donner les expressions de A et B en fonction de m, g, k, $\rho_\ell(T)$ et V_b.

Système : la boule, de masse m ; référentiel terrestre supposé galiléen. Deuxième loi de Newton :

$$\vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{f} = m\,\vec{a}$$

En projection sur l'axe Oz, dirigé vers le bas, avec $a_z = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$:

$$m\,g - \rho_\ell(T)\,V_b\,g - k\,v = m\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

En divisant par m :

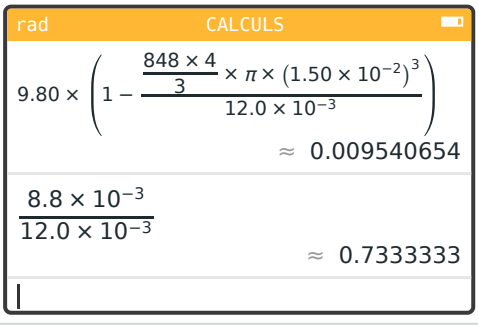
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g\left(1 - \frac{\rho_\ell(T)\,V_b}{m}\right) - \frac{k}{m}\,v$$

$$\boxed{A = g\left(1 - \frac{\rho_\ell(T)\,V_b}{m}\right) \quad \text{et} \quad B = \frac{k}{m}}$$

PIÈGE
Les signes. L'axe pointe vers le bas : le poids est compté positivement, la poussée et le frottement négativement.

COMPRENDRE
Vérification avec les données à 20 °C : on retrouve $A = 9{,}5 \times 10^{-3}\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$ et $B = 7{,}3 \times 10^{-1}\ \mathrm{s^{-1}}$, les valeurs fournies à la question suivante.

À LA CALCULATRICE



2.3 Établir l'expression littérale de la vitesse limite atteinte par la boule, puis calculer sa valeur.

Données utiles $A = 9{,}5 \times 10^{-3}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; $B = 7{,}3 \times 10^{-1}\ \text{s}^{-1}$

Quand la vitesse limite est atteinte, v ne varie plus : $\dfrac{dv}{dt} = 0$, donc $A - B\,v_{\text{lim}} = 0$.

$$v_{\text{lim}} = \frac{A}{B} = \frac{9{,}5 \times 10^{-3}}{7{,}3 \times 10^{-1}}$$

$$\boxed{v_{\text{lim}} = \frac{A}{B} = 1{,}3 \times 10^{-2}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$$

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme A et B. Le résultat, $13\ \text{mm}\cdot\text{s}^{-1}$, est bien la valeur du palier de la courbe du sujet.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\dfrac{9.5 \times 10^{-3}}{7.3 \times 10^{-1}}$ ≈ 0.0130137

2.4 À l'aide de l'équation différentielle et de la relation d'Euler, recopier et compléter le tableau des vitesses et des variations de vitesse aux dates t_0, t_1 et t_2.

Données utiles $A = 9{,}5 \times 10^{-3}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; $B = 7{,}3 \times 10^{-1}\ \text{s}^{-1}$; $\Delta t = 0{,}10\ \text{s}$; $v(t_0) = 0$; $\Delta v(t_1) = 8{,}8 \times 10^{-4}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

À chaque date, $a(t_n) = A - B\,v(t_n)$, donc $\Delta v(t_n) = \big(A - B\,v(t_n)\big)\,\Delta t$, puis $v(t_{n+1}) = v(t_n) + \Delta v(t_n)$.

$\Delta v(t_0) = (9{,}5 \times 10^{-3} - 0) \times 0{,}10 = 9{,}5 \times 10^{-4}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

$v(t_1) = 0 + 9{,}5 \times 10^{-4} = 9{,}5 \times 10^{-4}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

$v(t_2) = 9{,}5 \times 10^{-4} + 8{,}8 \times 10^{-4} = 1{,}8 \times 10^{-3}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

$\Delta v(t_2) = (9{,}5 \times 10^{-3} - 7{,}3 \times 10^{-1} \times 1{,}8 \times 10^{-3}) \times 0{,}10 = 8{,}2 \times 10^{-4}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

t (s)	$v(t_n)$ ($\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$)	$\Delta v(t_n)$ ($\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$)
$t_0 = 0$	0	$9{,}5 \times 10^{-4}$
$t_1 = 0{,}10$	$9{,}5 \times 10^{-4}$	$8{,}8 \times 10^{-4}$
$t_2 = 0{,}20$	$1{,}8 \times 10^{-3}$	$8{,}2 \times 10^{-4}$

$\boxed{\Delta v(t_0) = 9{,}5 \times 10^{-4}\ ;\ v(t_1) = 9{,}5 \times 10^{-4}\ ;\ v(t_2) = 1{,}8 \times 10^{-3}\ ;\ \Delta v(t_2) = 8{,}2 \times 10^{-4}\ (\text{en } \text{m}\cdot\text{s}^{-1})}$

COMPRENDRE
La valeur donnée par le sujet sert de contrôle : $(9{,}5 \times 10^{-3} - 0{,}73 \times 9{,}5 \times 10^{-4}) \times 0{,}10$ redonne bien $8{,}8 \times 10^{-4}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

MÉTHODE
Une ligne du tableau se remplit toujours dans le même ordre : la vitesse (ligne précédente : $v + \Delta v$), puis l'accélération $A - B\,v$, puis $\Delta v = a\,\Delta t$.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$9.5 \times 10^{-3} \times 0.10$ ≈ 9.5×10^{-4}

$9.5 \times 10^{-4} + 8.8 \times 10^{-4}$ ≈ 0.00183

$(9.5 \times 10^{-3} - 7.3 \times 10^{-1} \times 1.8 \times 10^{-3}) \times 0.10$ ≈ 8.186×10^{-4}

$(9.5 \times 10^{-3} - 0.73 \times 9.5 \times 10^{-4}) \times 0.10$ ≈ 8.8065×10^{-4}

2.5 Indiquer les différents régimes observés sur la courbe $v = f(t)$.

- De $t = 0$ à $t \approx 7$ s : la vitesse augmente, de moins en moins vite. C'est le régime transitoire.
- Au-delà de $t \approx 7$ s : la vitesse garde la valeur constante $v_{\text{lim}} = 13\ \text{mm} \cdot \text{s}^{-1}$. C'est le régime permanent.

Régime transitoire (jusqu'à 7 s environ), puis régime permanent à $v_{\text{lim}} = 13\ \text{mm} \cdot \text{s}^{-1}$.

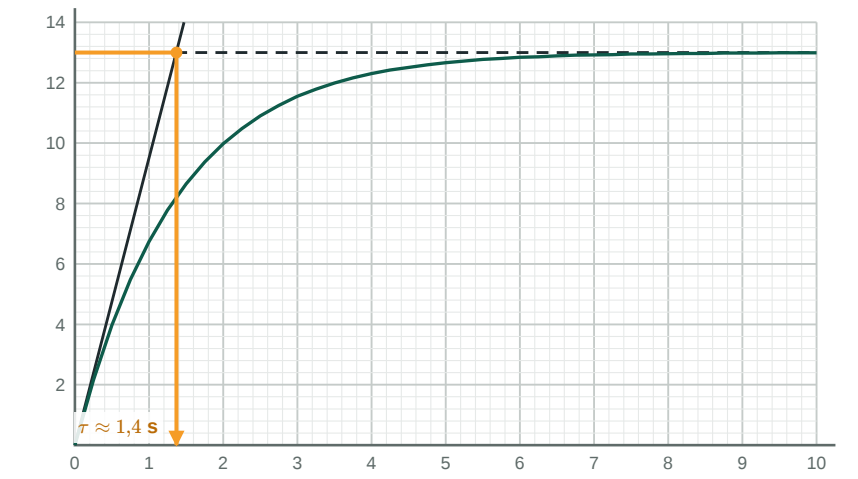
COMPRENDRE
En régime permanent, les forces se compensent, $P = \Pi + f$: le mouvement est rectiligne uniforme.

2.6 Déterminer graphiquement, en expliquant la méthode, le temps caractéristique τ.

On trace la tangente à la courbe à l'origine et l'asymptote horizontale $v = v_{\text{lim}} = 13\ \text{mm} \cdot \text{s}^{-1}$. L'abscisse de leur point d'intersection est le temps caractéristique τ.

Lecture sur le graphique : l'intersection se trouve un peu avant le milieu de l'intervalle entre 1,0 s et 2,0 s.

$\tau \approx 1{,}4$ s

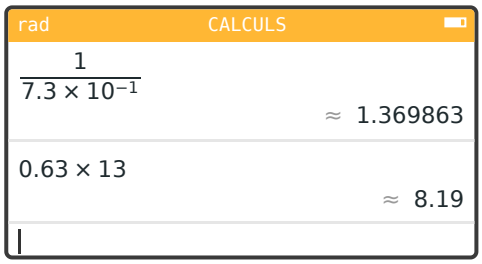


2.6 · Courbe du sujet : tangente à l'origine et asymptote $v = v_{\text{lim}}$

PIÈGE
Le tracé à la main de la tangente est peu précis : une valeur lue entre 1,2 s et 1,5 s est acceptable, à condition que la construction figure sur le graphique.

COMPRENDRE
Contrôle : la tangente à l'origine a pour pente A, elle atteint $v_{\text{lim}} = A/B$ à la date $\tau = 1/B = 1{,}4$ s. Autre méthode : τ est la date où $v = 0{,}63\, v_{\text{lim}} \approx 8{,}2\ \text{mm} \cdot \text{s}^{-1}$.

À LA CALCULATRICE



2.7 Justifier le choix de la valeur du pas $\Delta t = 0{,}10$ s.

Données utiles $\tau \approx 1{,}4$ s (2.6)

Le pas doit être petit devant le temps caractéristique, sinon la vitesse varie trop pendant Δt et le calcul d'Euler s'écarte de la solution. Ici $\dfrac{\tau}{\Delta t} = \dfrac{1{,}4}{0{,}10} = 14$: le régime transitoire est décrit par de nombreux points.

Un pas encore plus petit donnerait une courbe plus fidèle, mais multiplierait le nombre de calculs.

$\Delta t = 0{,}10$ s est environ 14 fois plus petit que τ : bon compromis entre précision et nombre de calculs.

À LA CALCULATRICE

