Voyage autour de Saturne

Bac S 2005 Centres étrangers (ancien programme) · Exercice 4 **5 points** **Durée conseillée 1 h 05**

1.1.1 Nommer la (les) force(s) extérieure(s) appliquée(s) au satellite Titan, de masse M_T.

Système {Titan}, étudié dans le référentiel saturno-centrique.

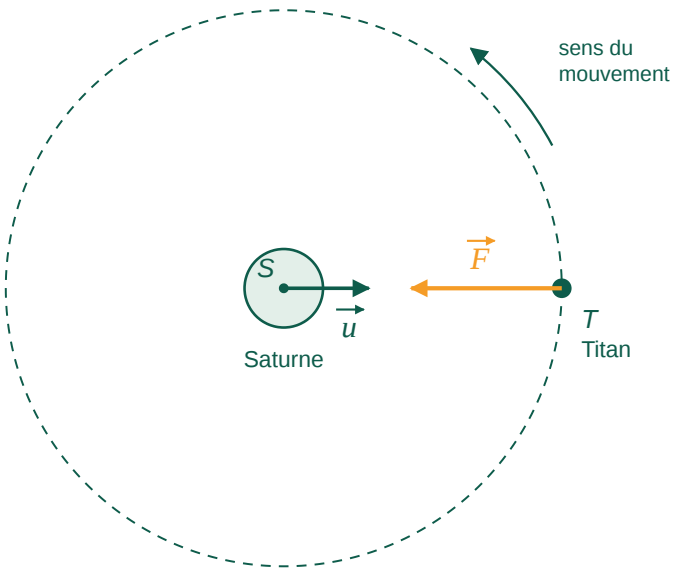
Titan n'est soumis qu'à une force : la force d'attraction gravitationnelle exercée par Saturne.

1.1.2 Représenter qualitativement sur un schéma Saturne, Titan et la (les) force(s) extérieure(s) appliquée(s) sur Titan.

La force $\vec{F}$ est appliquée au centre T de Titan, portée par la droite (ST) et dirigée de T vers S.

Voir le schéma : $\vec{F}$ part de T et pointe vers S.

PIÈGE
Une flèche partant de Saturne représenterait la force subie par Saturne. La force étudiée a son origine en T, sur le système.



1.1.2 · Saturne, Titan sur son orbite circulaire et la force exercée par Saturne

1.1.3 Donner l'expression vectorielle de cette (ces) force(s).

Les centres S et T sont distants de R_T et $\vec{u}$ est dirigé de S vers T, alors que la force attire Titan vers S :

$$\vec{F} = -\frac{G\,M_S\,M_T}{R_T^2}\,\vec{u}$$

PIÈGE
Oublier le signe « $-$ » : la force est attractive, donc de sens opposé à $\vec{u}$. Ne pas confondre non plus R_T (rayon de l'orbite) et R_S (rayon de la planète).

1.2.1 Exprimer l'accélération vectorielle $\vec{a}$ du centre d'inertie T de Titan en précisant la loi utilisée.

Dans le référentiel saturno-centrique supposé galiléen, la deuxième loi de Newton appliquée à Titan (masse M_T constante) s'écrit $\vec{F} = M_T\,\vec{a}$, soit

$$M_T\,\vec{a} = -\frac{G\,M_S\,M_T}{R_T^2}\,\vec{u}$$

$$\boxed{\vec{a} = -\frac{G\,M_S}{R_T^2}\,\vec{u}}$$

COMPRENDRE
La masse M_T se simplifie : l'accélération, donc le mouvement, ne dépend pas de la masse du satellite, seulement de celle de l'astre attracteur et de la distance.

1.2.2 Dans la base $(\vec{t}, \vec{n})$, où $\vec{a} = a_t\,\vec{t} + a_n\,\vec{n}$, donner les expressions littérales de a_t et de a_n en fonction de la vitesse v du satellite.

Pour un mouvement circulaire de rayon R_T :

$$\boxed{a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \quad \text{et} \quad a_n = \frac{v^2}{R_T}}$$

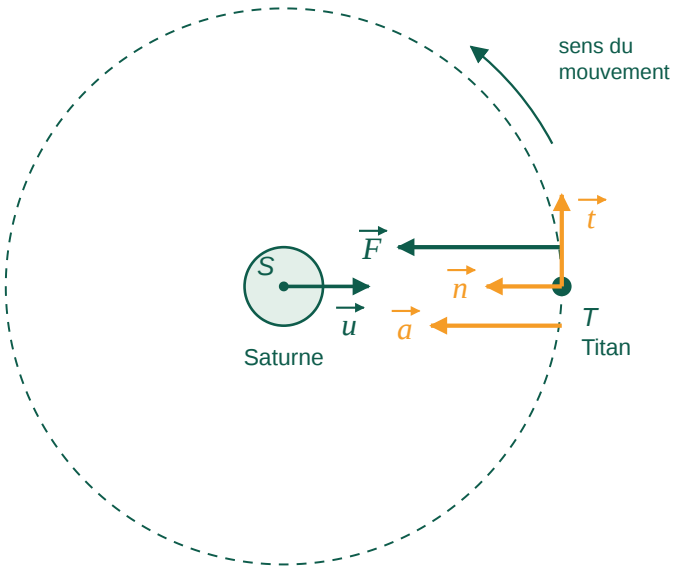
COMPRENDRE
a_t traduit la variation de la valeur de la vitesse ; a_n traduit le changement de direction du vecteur vitesse, et n'est jamais nulle sur un cercle.

1.2.3 À quelle composante se réduit l'accélération vectorielle $\vec{a}$ de Titan dans la base $(\vec{t}, \vec{n})$? Compléter le schéma précédent avec la base $(\vec{t}, \vec{n})$ et l'accélération $\vec{a}$.

Comme $\vec{n} = -\vec{u}$, le résultat de 1.2.1 devient $\vec{a} = \dfrac{G\,M_S}{R_T^2}\,\vec{n}$:
l'accélération n'a aucune composante selon $\vec{t}$.

$\vec{a} = a_n\,\vec{n}$: l'accélération se réduit à sa composante normale, elle est dirigée vers S (centripète).

MÉTHODE
Sur le schéma : $\vec{t}$ tangent à l'orbite dans le sens du mouvement, $\vec{n}$ de T vers S, $\vec{a}$ de même direction et de même sens que $\vec{F}$.



1.2.3 · Schéma complété : les trois vecteurs dirigés vers S sont portés par la droite (TS), décalés ici pour rester lisibles

1.3.1 Montrer que le mouvement de Titan est uniforme.

D'après 1.2.3, la composante tangentielle de l'accélération est nulle : $a_t = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$.

La valeur v de la vitesse est constante : le mouvement circulaire de Titan est **uniforme**.

PIÈGE
Écrire « l'accélération est nulle » ou « $\vec{a}$ est constant ». Seule a_t est nulle ; le vecteur $\vec{a}$ garde la même norme mais change de direction à chaque instant.

1.3.2 Retrouver l'expression de la vitesse de Titan sur son orbite autour de Saturne : $v = \sqrt{\dfrac{G\,M_S}{R_T}}$.

On identifie les deux expressions de la composante normale (1.2.2 et 1.2.3) :

$$\frac{v^2}{R_T} = \frac{G\,M_S}{R_T^2} \quad \text{donc} \quad v^2 = \frac{G\,M_S}{R_T}$$

$v = \sqrt{\dfrac{G\,M_S}{R_T}}$, expression attendue.

MÉTHODE
Force centrale et orbite circulaire : deuxième loi de Newton, puis identification dans la base $(\vec{t}, \vec{n})$. Selon $\vec{t}$: mouvement uniforme. Selon $\vec{n}$: la vitesse.

2.1.1 À partir de $T = \dfrac{2\pi R}{v}$ et de $v = \sqrt{\dfrac{G\,M_S}{R}}$, retrouver la troisième loi de Kepler $\dfrac{T^2}{R^3} = \dfrac{4\pi^2}{G\,M_S}$.

On élève la période au carré, puis on remplace v^2 par $\dfrac{G\,M_S}{R}$:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 R^2}{v^2} = 4\pi^2 R^2 \times \frac{R}{G\,M_S} = \frac{4\pi^2 R^3}{G\,M_S}$$

$\dfrac{T^2}{R^3} = \dfrac{4\pi^2}{G\,M_S}$, expression attendue.

COMPRENDRE
Le rapport $\dfrac{T^2}{R^3}$ ne dépend que de M_S : il a la même valeur pour tous les satellites de Saturne, Titan, Encelade ou la sonde.

2.1.2 Utiliser la troisième loi de Kepler pour déterminer la valeur du rayon R_E de l'orbite d'Encelade.

Données utiles $T_E = 1{,}37$ jour terrestre ; $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ S.I. ; $M_S = 5{,}69 \times 10^{26}$ kg

Pour Encelade : $\dfrac{T_E^2}{R_E^3} = \dfrac{4\pi^2}{G\,M_S}$, donc $R_E = \sqrt[3]{\dfrac{G\,M_S\,T_E^2}{4\pi^2}}$.

Période en secondes : $T_E = 1{,}37 \times 24 \times 3600 = 1{,}18 \times 10^5$ s.

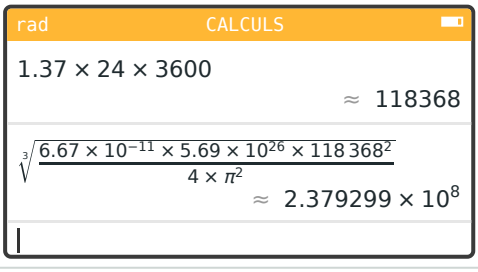
$$R_E = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}69 \times 10^{26} \times (1{,}37 \times 24 \times 3600)^2}{4\pi^2}}$$

$R_E = 2{,}38 \times 10^8$ m $= 2{,}38 \times 10^5$ km

PIÈGE
Laisser T_E en jours. Avec G en unités S.I., la période doit être en secondes et le rayon sort en mètres.

COMPRENDRE
Trois chiffres significatifs, comme G, M_S et T_E. Encelade est environ cinq fois plus proche de Saturne que Titan ($R_T = 1{,}22 \times 10^6$ km), d'où sa période bien plus courte.

À LA CALCULATRICE



3.1 Quelle condition doit-on avoir sur les périodes T_S (rotation de Saturne sur elle-même) et T_C (révolution de Cassini autour de Saturne) pour que la sonde soit « saturno-stationnaire » ?

Pour rester à la verticale d'un même point de l'équateur, la sonde doit faire un tour d'orbite pendant que Saturne fait un tour sur elle-même.

$T_C = T_S$

COMPRENDRE
Il faut aussi que l'orbite soit dans le plan de l'équateur et parcourue dans le sens de rotation de Saturne ; l'énoncé ne demande que la condition sur les périodes.

3.2.1 En utilisant la troisième loi de Kepler, montrer que l'altitude de la sonde vaut $h = \sqrt[3]{\dfrac{T_C^2\, G\, M_S}{4\pi^2}} - R_S$.

La sonde est à la distance $R_C = R_S + h$ du centre de Saturne. La troisième loi de Kepler donne :

$$\frac{T_C^2}{(R_S+h)^3} = \frac{4\pi^2}{G\,M_S} \quad \text{donc} \quad (R_S+h)^3 = \frac{T_C^2\, G\, M_S}{4\pi^2}$$

$h = \sqrt[3]{\dfrac{T_C^2\, G\, M_S}{4\pi^2}} - R_S$, expression attendue.

PIÈGE
Remplacer R par h dans la loi de Kepler. Le rayon de l'orbite se mesure depuis le centre de Saturne ; l'altitude se mesure depuis sa surface.

3.2.2 Calculer la valeur de h.

Données utiles $T_C = T_S = 10\text{ h }39\text{ min}$ (3.1) ; $R_S = 6{,}0 \times 10^4$ km ; $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ S.I. ; $M_S = 5{,}69 \times 10^{26}$ kg

$T_C = T_S = 10 \times 3600 + 39 \times 60 = 38\,340$ s et $R_S = 6{,}0 \times 10^7$ m.

$$h = \sqrt[3]{\frac{38\,340^2 \times 6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}69 \times 10^{26}}{4\pi^2}} - 6{,}0 \times 10^7$$

Le rayon de l'orbite vaut $1{,}12 \times 10^8$ m, d'où :

$h = 5{,}2 \times 10^7\text{ m} = 5{,}2 \times 10^4\text{ km}$

PIÈGE
Deux conversions à faire : T_S en secondes et R_S en mètres. Soustraire $6{,}0 \times 10^4$ (en km) d'un rayon en mètres ne change presque rien et donne $1{,}1 \times 10^8$ m, faux.

COMPRENDRE
R_S n'a que deux chiffres significatifs (connu à $0{,}1 \times 10^7$ m près) : la différence se donne à cette précision, soit $5{,}2 \times 10^7$ m.

À LA CALCULATRICE

