La vie d'une bulle

Bac S 2006 Métropole rattrapage (ancien programme) · Exercice 4 **5,5 points** **Durée conseillée 1 h 05**

1.1 Donner la direction et le sens de la poussée d'Archimède $\vec{F}_A$ qui s'exerce sur une bulle de volume V_0 dans la boisson.

$\vec{F}_A$ est **verticale** et dirigée **vers le haut**.

COMPRENDRE
La poussée d'Archimède est toujours opposée au poids du fluide déplacé : elle a la direction du poids, mais le sens contraire.

1.2 Donner l'expression littérale de la valeur de la poussée d'Archimède en fonction du volume V_0 de la bulle.

La valeur de la poussée d'Archimède est celle du poids du liquide dont la bulle prend la place, soit un volume V_0 de liquide de masse volumique ρ_e.

$$F_A = \rho_e \, V_0 \, g$$

PIÈGE
Écrire ρ_{dc} à la place de ρ_e. La masse volumique qui intervient est celle du fluide déplacé (la boisson), pas celle du gaz contenu dans la bulle.

2.1.1 Montrer que le poids P_0 de la bulle a une valeur négligeable devant celle de la poussée d'Archimède en calculant le rapport $\dfrac{P_0}{F_A}$.

Données utiles $\rho_e = 1{,}0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$; $\rho_{dc} = 1{,}8 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$; $F_A = \rho_e V_0 g$ (1.2)

La bulle contient du dioxyde de carbone : sa masse est $m = \rho_{dc} \, V_0$ et son poids $P_0 = \rho_{dc} \, V_0 \, g$.

$$\frac{P_0}{F_A} = \frac{\rho_{dc} \, V_0 \, g}{\rho_e \, V_0 \, g} = \frac{\rho_{dc}}{\rho_e} = \frac{1{,}8}{1{,}0 \times 10^3} = 1{,}8 \times 10^{-3}$$

$\dfrac{P_0}{F_A} = 1{,}8 \times 10^{-3} \ll 1$: le poids est environ 560 fois plus petit que la poussée d'Archimède, il est négligeable.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme les deux masses volumiques. Le rapport ne dépend ni de V_0 ni de g : le résultat reste vrai quand la bulle grossit.

MÉTHODE
Pour comparer deux forces, former leur rapport littéral et simplifier avant le calcul. Sans calculatrice, il ne reste ici qu'une division par 10^3.

2.1.2 En utilisant la deuxième loi de Newton, établir l'expression de la coordonnée a_z du vecteur accélération de la bulle en fonction de ρ_e, ρ_{dc} et g.

Système {bulle}, de masse $m = \rho_{dc} \, V_0$ constante ; référentiel terrestre supposé galiléen.

Forces : la poussée d'Archimède $\vec{F}_A$; le poids est négligé (2.1.1) et il n'y a pas de frottement.

Deuxième loi de Newton : $\vec{F}_A = m \, \vec{a}$.

En projection sur l'axe (Oz), orienté vers le haut : $\rho_e \, V_0 \, g = \rho_{dc} \, V_0 \, a_z$

$$a_z = \frac{\rho_e}{\rho_{dc}} \, g$$

PIÈGE
Confondre les deux masses volumiques : ρ_e vient de la force (liquide déplacé), ρ_{dc} vient de la masse de la bulle (gaz).

COMPRENDRE
Sans négliger le poids, on trouverait $a_z = \left(\dfrac{\rho_e}{\rho_{dc}} - 1\right) g$: la différence est de moins de 0,2 %.

2.1.3 En déduire l'expression de la valeur de la vitesse de la bulle en fonction du temps.

Données utiles $v_0 = 0$ à $t_0 = 0$; a_z (2.1.2)

$a_z = \dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}$ est constante : par intégration, $v_z(t) = \dfrac{\rho_e}{\rho_{dc}}\, g\, t + C$.

Condition initiale : $v_z(0) = 0$, donc $C = 0$.

La bulle monte dans le sens de l'axe : $v_z > 0$, donc $v = v_z$.

$$v(t) = \frac{\rho_e}{\rho_{dc}}\, g\, t$$

MÉTHODE
Toute primitive s'écrit avec une constante, que l'on détermine avec la condition initiale. L'écrire puis montrer qu'elle est nulle fait partie de la réponse attendue.

2.1.4 Montrer que la durée t_S théoriquement nécessaire pour que la bulle atteigne la surface avec la vitesse v_S est alors d'environ trente microsecondes.

Données utiles $v_S = 15\ \mathrm{cm \cdot s^{-1}}$; $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$; $\rho_e = 1{,}0 \times 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$; $\rho_{dc} = 1{,}8\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$

À la date t_S : $v(t_S) = v_S$, soit $v_S = \dfrac{\rho_e}{\rho_{dc}}\, g\, t_S$, donc $t_S = \dfrac{v_S\, \rho_{dc}}{\rho_e\, g}$.

Avec $v_S = 1{,}5 \times 10^{-1}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$:

$$t_S = \frac{1{,}5 \times 10^{-1} \times 1{,}8}{1{,}0 \times 10^3 \times 10} = 2{,}7 \times 10^{-5}\ \mathrm{s}$$

$t_S = 2{,}7 \times 10^{-5}\ \mathrm{s} = 27\ \mu\mathrm{s}$, soit environ $30\ \mu\mathrm{s}$ comme annoncé.

PIÈGE
Laisser v_S en $\mathrm{cm \cdot s^{-1}}$: le résultat serait cent fois trop grand.

MÉTHODE
Sans calculatrice : $1{,}5 \times 1{,}8 = 2{,}7$, puis les puissances de dix à part, $10^{-1} \div 10^4 = 10^{-5}$.

2.1.5 Cette valeur correspond-elle aux observations de la vie quotidienne ? Conclure quant à la validité du modèle proposé.

Données utiles $t_S \approx 30\ \mu\mathrm{s}$ (2.1.4)

Non. Dans un verre, on suit à l'œil nu la montée d'une bulle : elle dure de l'ordre de la seconde, et non quelques dizaines de microsecondes.

Le modèle sans frottement **n'est pas valide** : il prévoit une montée beaucoup trop rapide.

COMPRENDRE
Avec ce modèle, l'accélération vaudrait $\dfrac{\rho_e}{\rho_{dc}}\, g \approx 5{,}6 \times 10^3\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$, plus de 500 fois g. Une force s'opposant au mouvement a forcément été oubliée.

2.2.1 Représenter schématiquement, sans souci d'échelle, les forces non négligeables qui s'exercent sur la bulle en mouvement après son décollement.

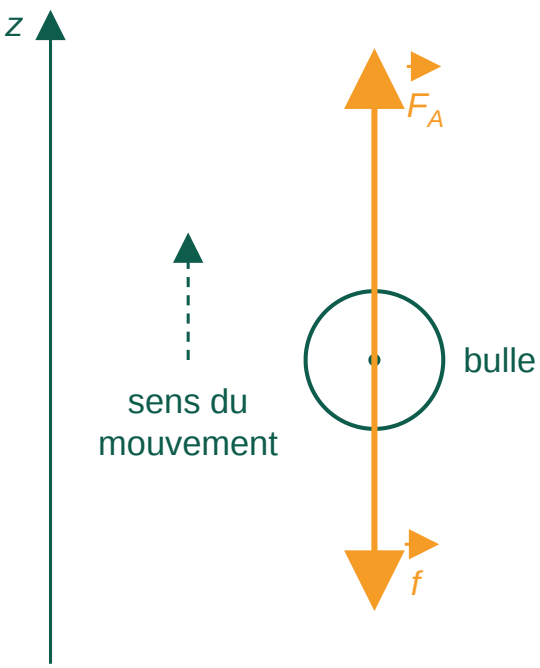
Le poids étant négligeable (2.1.1), deux forces s'exercent sur la bulle :

- la poussée d'Archimède $\vec{F}_A$, verticale, vers le haut ;
- la force de frottement $\vec{f} = -k\,\vec{v}$, de sens opposé à la vitesse : verticale, vers le bas.

Schéma : $\vec{F}_A$ vers le haut, $\vec{f}$ vers le bas, toutes deux tracées à partir du centre de la bulle.

PIÈGE
Dessiner le poids : la question demande seulement les forces non négligeables. Ne pas représenter non plus la vitesse comme une force.

COMPRENDRE
Tant que la bulle accélère vers le haut, $F_A > f$: on peut tracer $\vec{F}_A$ plus longue que $\vec{f}$.



2.2.1 · Forces non négligeables sur la bulle pendant sa remontée

2.2.2 En appliquant la deuxième loi de Newton, montrer que l'équation différentielle qui régit l'évolution de la vitesse de la bulle s'écrit $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{k\,v}{\rho_{dc}\,V_0} = \frac{\rho_e}{\rho_{dc}}\,g$.

Système {bulle}, de masse $m = \rho_{dc}\,V_0$; référentiel terrestre supposé galiléen ; forces : $\vec{F}_A$ et $\vec{f}$ (2.2.1).

Deuxième loi de Newton : $\vec{F}_A + \vec{f} = m\,\vec{a}$.

En projection sur (Oz), avec $f_z = -k\,v_z$ et $a_z = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}$:

$$\rho_e\,V_0\,g - k\,v_z = \rho_{dc}\,V_0\,\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}$$

On divise par $\rho_{dc}\,V_0$ et on regroupe les termes en v_z à gauche. Comme la bulle monte, $v_z = v$:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{k\,v}{\rho_{dc}\,V_0} = \frac{\rho_e}{\rho_{dc}}\,g}$$

PIÈGE
Oublier le signe « $-$ » de la force de frottement en projetant, ou diviser par $\rho_e V_0$: la masse de la bulle est $\rho_{dc} V_0$.

2.2.3 En déduire l'expression littérale de la vitesse limite v_{lim} atteinte par la bulle.

Quand la vitesse limite est atteinte, v ne varie plus : $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$.

L'équation différentielle devient $\frac{k\,v_{lim}}{\rho_{dc}\,V_0} = \frac{\rho_e}{\rho_{dc}}\,g$.

$$\boxed{v_{lim} = \frac{\rho_e\,V_0\,g}{k}}$$

COMPRENDRE
Cela revient à écrire $F_A = f$: à la vitesse limite, les deux forces se compensent et le mouvement devient rectiligne uniforme.

2.2.4 L'application numérique donne v_{lim} voisin de $1\ \text{mm}\cdot\text{s}^{-1}$. Compte tenu de cette valeur, conclure quant à la validité du modèle proposé.

Données utiles $v_S \approx 15\ \text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$

Avec ce modèle, la vitesse de la bulle ne peut pas dépasser $v_{lim} \approx 1\ \text{mm}\cdot\text{s}^{-1} = 0{,}1\ \text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$.

Or la bulle arrive à la surface avec $v_S \approx 15\ \text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$, soit une vitesse environ 150 fois plus grande.

Le modèle avec frottement et volume constant **n'est pas valide** : il prévoit une montée beaucoup trop lente.

MÉTHODE
Valider un modèle, c'est comparer sa prévision à une mesure, dans la même unité, et chiffrer l'écart. Le premier modèle était trop rapide, le second est trop lent.

2.3.1 En s'aidant d'une phrase du texte introductif à la partie 1, expliquer pourquoi le volume de la bulle augmente si fortement lors de sa remontée.

Le texte indique que les bulles « vont s'enrichir continûment en gaz au cours de leur remontée » : du dioxyde de carbone dissous dans la boisson passe dans la bulle pendant toute l'ascension.

La quantité de matière de gaz dans la bulle **n'est pas constante**, elle augmente : c'est ce qui fait grossir fortement la bulle.

COMPRENDRE
À pression et température presque constantes, le volume d'un gaz est proportionnel à sa quantité de matière : un volume multiplié par un très grand nombre impose une quantité de gaz multipliée d'autant.

2.3.2 Sachant que le coefficient k augmente avec le rayon de la bulle, préciser qualitativement l'influence de la variation du volume de la bulle sur chacune des forces qui s'exercent sur elle au cours de la remontée.

Poussée d'Archimède : $F_A = \rho_e\, V\, g$ est proportionnelle au volume V de la bulle. Quand V augmente, F_A augmente.

Force de frottement : $f = k\, v$. Le volume $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ augmente, donc le rayon r augmente et k aussi. À vitesse donnée, f augmente.

Les deux forces, poussée d'Archimède et frottement, **augmentent** quand la bulle grossit.

PIÈGE
Parler du poids : l'énoncé rappelle qu'il reste négligeable. Seules la poussée d'Archimède et la force de frottement sont à discuter.

COMPRENDRE
Le volume croît comme r^3 : la poussée augmente plus vite que le frottement, ce qui permet à la bulle d'accélérer jusqu'à la surface.

3.1 Malgré l'utilisation de la caméra ultra-rapide, pourquoi ne peut-on pas obtenir d'images du film liquide en train de se rompre ?

Données utiles caméra : 2000 images par seconde ; rupture du film : quelques dizaines de microsecondes

Durée entre deux images consécutives : $\Delta t = \dfrac{1}{2000} = 5{,}0 \times 10^{-4}\ \text{s} = 500\ \mu\text{s}$.

La calotte disparaît en quelques dizaines de microsecondes, soit une durée au moins dix fois plus courte que Δt.

La rupture se produit entièrement entre deux images : la caméra enregistre le film intact, puis le cratère, mais pas la rupture.

PIÈGE
Invoquer la résolution spatiale : elle est suffisante (de l'ordre du micromètre). C'est la cadence de prise de vue qui est trop faible.

MÉTHODE
Pour filmer un phénomène, il faut plusieurs images pendant sa durée. On compare donc toujours la durée du phénomène à l'intervalle de temps entre deux images.

3.2 L'onde circulaire créée est-elle longitudinale ou transversale ? Justifier.

L'onde se propage horizontalement, à la surface du liquide. Sur son passage, chaque point de la surface se soulève puis s'abaisse : la perturbation est verticale.

La perturbation est perpendiculaire à la direction de propagation : l'onde est **transversale**.

COMPRENDRE
Une onde longitudinale aurait une perturbation parallèle à la direction de propagation, comme les compressions de l'air dans une onde sonore.