La Logan au banc d'essai

Bac S 2006 Liban (ancien programme) · Exercice 1 **9 points** **Durée conseillée 1 h 57**

1 Partie A, I (reprises). a) Donner la relation entre les vecteurs accélération $\vec{a}_1$ et vitesse $\vec{v}$ de G, puis en déduire $v(t)$ en fonction de a_1, v_0 et t. b) Montrer que $a_1 = 2{,}1\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Données utiles $v_0 = 30\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$; $v_A = 70\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$; durée du test : $t_A = 5{,}4\ \text{s}$

a) Par définition, $\vec{a}_1 = \dfrac{\text{d}\vec{v}}{\text{d}t}$.

En projection sur l'axe (Ox), orienté dans le sens du mouvement : $\dfrac{\text{d}v}{\text{d}t} = a_1$, avec a_1 constante. Une primitive donne $v(t) = a_1\,t + C$. Or $v(0) = v_0$, donc $C = v_0$:

$$v(t) = a_1\,t + v_0$$

b) À la date t_A, la vitesse vaut v_A : $v_A = a_1\,t_A + v_0$, soit $a_1 = \dfrac{v_A - v_0}{t_A}$.

Les vitesses sont converties en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ en divisant par 3,6 :

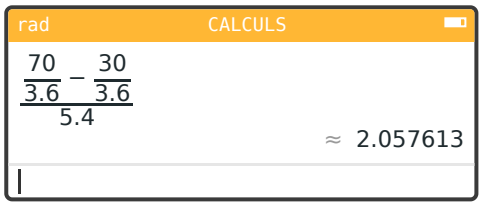
$$a_1 = \frac{\dfrac{70}{3{,}6} - \dfrac{30}{3{,}6}}{5{,}4} = 2{,}06\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

$v(t) = a_1\,t + v_0$; $a_1 = 2{,}06\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2} \approx 2{,}1\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, la valeur attendue.

PIÈGE
Laisser les vitesses en $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$: on trouverait 7,4, qui n'est pas en unité SI. On divise par 3,6 pour passer des $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ aux $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

COMPRENDRE
Chiffres significatifs : la durée $5{,}4$ s en compte deux, le résultat s'écrit donc $2{,}1\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. Pour les calculs suivants, on garde la valeur non arrondie $2{,}06$.

À LA CALCULATRICE



2 Partie A, I (reprises). a) Établir l'équation horaire $x(t)$ de la position de G. b) En déduire la distance D parcourue pendant le passage de 30 à 70 $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$.

Données utiles $a_1 = 2{,}06\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ (Q1) ; $v_0 = \dfrac{30}{3{,}6} = 8{,}33\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $t_A = 5{,}4\ \text{s}$

a) Sur l'axe (Ox) : $v = \dfrac{\text{d}x}{\text{d}t} = a_1\,t + v_0$. Une primitive donne $x(t) = \dfrac{1}{2}\,a_1\,t^2 + v_0\,t + C'$.

À $t = 0$, G est au point O, origine de l'axe : $x(0) = 0$, donc $C' = 0$.

$$x(t) = \frac{1}{2}\,a_1\,t^2 + v_0\,t$$

b) La distance parcourue est $D = x(t_A) - x(0) = x(t_A)$:

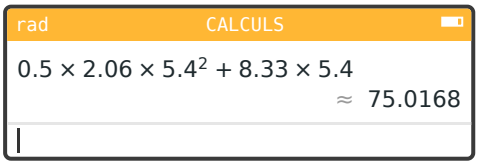
$$D = \frac{1}{2} \times 2{,}06 \times 5{,}4^2 + 8{,}33 \times 5{,}4 = 75\ \text{m}$$

$x(t) = \dfrac{1}{2}\,a_1\,t^2 + v_0\,t$; $D = 75\ \text{m}$

COMPRENDRE
Avec la valeur arrondie $a_1 = 2{,}1\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, on obtient $75{,}6$ m, arrondi à 76 m : cet écart d'un mètre ne vient que de l'arrondi intermédiaire.

MÉTHODE
Vérification rapide : à accélération constante, la vitesse moyenne est la demi-somme des vitesses extrêmes, soit 50 $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$. Alors $D = \dfrac{50}{3{,}6} \times 5{,}4 = 75$ m.

À LA CALCULATRICE



1 Partie A, II (virage). a) Exprimer v_3 et v_5 en fonction de G_2G_4, G_4G_6 et τ. b) Montrer qu'elles valent toutes deux environ 40 $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$. c) Représenter $\vec{v}_3$ et $\vec{v}_5$. d) Représenter $\Delta\vec{v}_4 = \vec{v}_5 - \vec{v}_3$.

Données utiles $\tau = 1{,}00\ \text{s}$; figure 1 : 1,0 cm pour 10 m ; vitesses : 1 cm pour 2 $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

a) La vitesse en un point est assimilée à la vitesse moyenne entre les deux positions qui l'encadrent, séparées de 2τ :

$$v_3 = \frac{G_2G_4}{2\tau} \qquad v_5 = \frac{G_4G_6}{2\tau}$$

b) Sur la figure 1, on mesure $G_2G_4 = G_4G_6 = 2{,}2$ cm, soit 22 m en réalité. Les deux distances étant égales, $v_3 = v_5$:

$$v_3 = v_5 = \frac{22}{2 \times 1{,}00} = 11\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1} = 11 \times 3{,}6 \approx 40\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$$

c) Chaque vecteur vitesse part du point considéré, est tangent à la trajectoire (donc perpendiculaire au rayon), dans le sens du mouvement. Sa longueur est $\frac{11}{2} = 5{,}5$ cm.

d) On reporte $\vec{v}_5$, puis $-\vec{v}_3$ à la suite : $\Delta\vec{v}_4$ joint l'origine du premier à l'extrémité du second. On le trace ensuite à partir de G_4 ; il mesure environ 2,4 cm et pointe vers O.

$v_3 = v_5 = 11\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \approx 40\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$; vecteurs de 5,5 cm sur la figure.

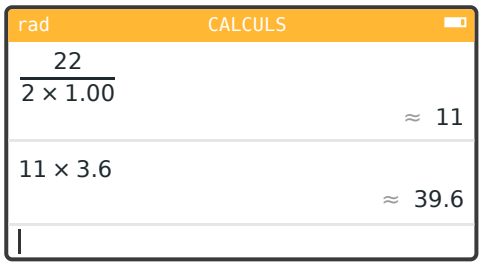
PIÈGE

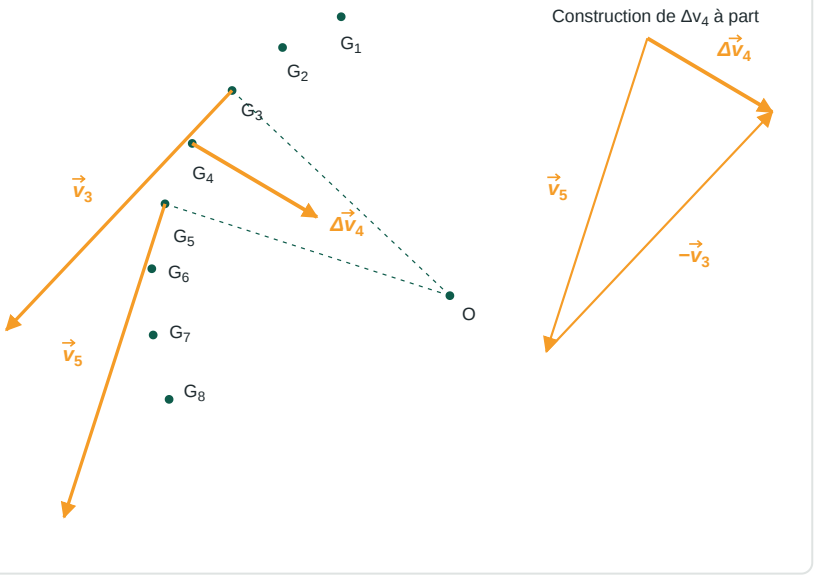
Diviser par τ au lieu de 2τ : entre G_2 et G_4, il s'écoule deux intervalles de temps. La vitesse serait doublée.

MÉTHODE

Avant de mesurer, contrôler l'échelle de l'impression : le rayon OG doit mesurer 5,0 cm puisque $R = 50$ m. Sinon, corriger chaque longueur par proportionnalité (sur une copie réduite, on lit plutôt 2,1 cm).

À LA CALCULATRICE





1 · Figure 1 complétée : $\vec{v}_3$ et $\vec{v}_5$ (5,5 cm chacun), puis $\Delta\vec{v}_4 = \vec{v}_5 - \vec{v}_3$ reporté en G_4

2 Partie A, II (virage). a) Donner l'expression du vecteur accélération $\vec{a}_4$ au point G_4 en fonction de $\Delta\vec{v}_4$ et τ. b) Calculer la valeur de a_4 en unité SI.

Données utiles longueur de $\Delta\vec{v}_4$: 2,4 cm (Q1) ; 1 cm pour 2 $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $\tau = 1{,}00$ s

a) L'accélération en G_4 est la variation du vecteur vitesse entre les dates t_3 et t_5, divisée par la durée 2τ :

$$\vec{a}_4 = \frac{\Delta\vec{v}_4}{2\tau}$$

b) Avec l'échelle des vitesses : $\Delta v_4 = 2{,}4 \times 2 = 4{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

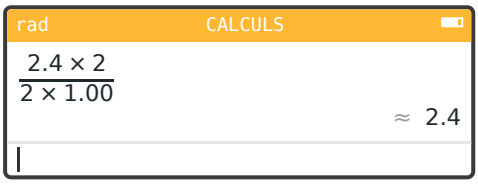
$$a_4 = \frac{\Delta v_4}{2\tau} = \frac{4{,}8}{2 \times 1{,}00} = 2{,}4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

$\vec{a}_4 = \dfrac{\Delta\vec{v}_4}{2\tau}$; $a_4 = 2{,}4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

COMPRENDRE
La valeur de la vitesse ne change pas, mais sa direction tourne : le vecteur vitesse varie, donc l'accélération n'est pas nulle. Selon la finesse du tracé, on trouve entre 2,3 et 2,6 $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

MÉTHODE
Contrôle par le calcul : pour un mouvement circulaire uniforme, $a = \dfrac{v^2}{R} = \dfrac{11^2}{50} = 2{,}4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. La construction graphique est cohérente.

À LA CALCULATRICE



3 Partie A, II (virage). a) Le constructeur qualifie cette accélération de « latérale » : quel qualificatif emploie-t-on plutôt en physique ? b) Son effet sur les passagers est-il négligeable devant celui de l'accélération de la pesanteur ?

Données utiles $a_4 = 2{,}4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ (Q2) ; $g = 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

a) Le vecteur $\Delta\vec{v}_4$, donc $\vec{a}_4$, est dirigé selon le rayon G_4O, vers le centre de la trajectoire. En physique, cette accélération est dite **radiale**, ou plus précisément **centripète** (c'est l'accélération normale du repère de Frenet).

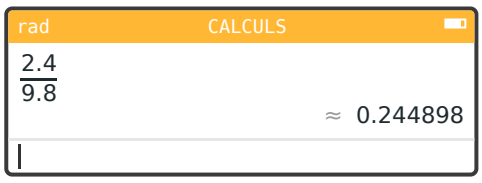
b) On compare les deux valeurs : $\dfrac{a_4}{g} = \dfrac{2{,}4}{9{,}8} = 0{,}24$.

L'accélération dans le virage vaut environ un quart de celle de la pesanteur : les deux sont du même ordre de grandeur.

Accélération centripète ; $a_4 \approx 0{,}24\,g$: son effet n'est pas négligeable devant celui de la pesanteur.

COMPRENDRE
On néglige une grandeur devant une autre quand elle est au moins dix fois plus petite, souvent cent fois. Ici le rapport est de 4 seulement : les passagers se sentent nettement déportés vers l'extérieur du virage.

À LA CALCULATRICE



1 Partie A, III (suspension). Caisse à l'arrêt, sans passager. a) Faire l'inventaire des forces qui s'exercent sur la caisse. b) Trouver la relation entre $|\Delta\ell_0|$, M, k et g à l'aide du principe d'inertie.

Système : la caisse, étudiée dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

a) Deux forces s'exercent sur la caisse :

- son poids $\vec{P}$, vertical, vers le bas, de valeur $P = M\,g$;
- la force $\vec{F}$ exercée par le ressort comprimé, verticale, vers le haut, de valeur $F = k\,|\Delta\ell_0|$.

b) La caisse est immobile : d'après le principe d'inertie, les forces se compensent, $\vec{P} + \vec{F} = \vec{0}$. Les deux forces ont donc la même valeur :

$M\,g = k\,|\Delta\ell_0|$

COMPRENDRE
Un ressort comprimé repousse ce qui l'écrase : la force est dirigée vers le haut. L'amortisseur, lui, n'agit que si la caisse bouge ; à l'arrêt, il n'exerce aucune force.

2 Partie A, III (suspension). Quatre essayeurs montent à bord et la caisse s'affaisse de h. a) Établir la relation $k = \dfrac{m\,g}{h}$. b) Déterminer la dimension de k. c) Calculer k.

Données utiles $m = 280\ \text{kg}$; $h = 3{,}0 \times 10^{-2}\ \text{m}$; $g = 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; $|\Delta\ell| = |\Delta\ell_0| + h$; $M\,g = k\,|\Delta\ell_0|$ (Q1)

a) Le système {caisse + essayeurs}, de masse $M + m$, est de nouveau immobile. Le principe d'inertie donne :

$(M + m)\,g = k\,|\Delta\ell| = k\,|\Delta\ell_0| + k\,h$

Comme $M\,g = k\,|\Delta\ell_0|$, il reste $m\,g = k\,h$, d'où $k = \dfrac{m\,g}{h}$.

b) $[k] = \dfrac{[m]\,[g]}{[h]} = \dfrac{\text{M}\cdot\text{L}\cdot\text{T}^{-2}}{\text{L}} = \text{M}\cdot\text{T}^{-2}$: k s'exprime en $\text{kg}\cdot\text{s}^{-2}$, c'est-à-dire en $\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$.

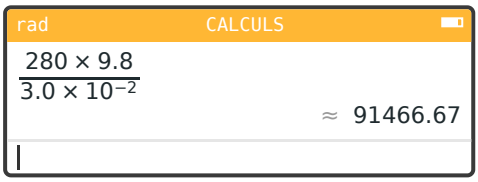
c) $k = \dfrac{280 \times 9{,}8}{3{,}0 \times 10^{-2}} = 9{,}1 \times 10^{4}\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}$

$$k = \frac{m\,g}{h}\ ;\ [k] = \text{M}\cdot\text{T}^{-2}\ ;\ k = 9{,}1 \times 10^{4}\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}$$

PIÈGE
Utiliser la masse totale $M + m$ dans le calcul de k : seule la surcharge m provoque l'affaissement supplémentaire h.

COMPRENDRE
L'accélération g a pour dimension $\text{L}\cdot\text{T}^{-2}$. Le résultat est cohérent avec $F = k\,|\Delta\ell|$: une force divisée par une longueur, soit des $\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$.

À LA CALCULATRICE



3 Partie A, III (suspension). Montrer que la période propre des oscillations de la caisse, avec un seul essayeur à bord, vaut $T_0 = 0{,}71\ \text{s}$.

Données utiles $M = 1\,095\ \text{kg}$; $m_1 = 70\ \text{kg}$; $k = 9{,}15 \times 10^{4}\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}$ (Q2, valeur non arrondie)

La période propre d'un oscillateur {masse + ressort} est $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{\text{masse}}{k}}$. La masse qui oscille est celle de la caisse et de l'essayeur, $M + m_1$:

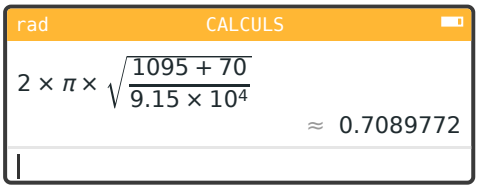
$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{M + m_1}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{1\,095 + 70}{9{,}15 \times 10^{4}}} = 0{,}71\ \text{s}$$

$T_0 = 0{,}709\ \text{s} \approx 0{,}71\ \text{s}$, la valeur attendue.

PIÈGE
Prendre la masse M seule, ou les 280 kg des quatre essayeurs : ici un seul essayeur de 70 kg est à bord.

COMPRENDRE
L'oscillateur masse-ressort ne figure plus au programme actuel de spécialité : l'expression de T_0 était une connaissance exigible en 2006. Elle serait aujourd'hui donnée dans l'énoncé.

À LA CALCULATRICE



4 Partie A, III (suspension). a) Sur une Logan neuve, la caisse retrouve sa position sans osciller après une bosse : nommer ce régime. b) Prévoir le comportement de la caisse quand les amortisseurs sont « fatigués ».

a) La caisse revient à sa position d'équilibre sans la dépasser, donc sans osciller : l'amortissement est fort, le régime est **apériodique**.

b) Avec un amortissement plus faible, la caisse oscille de part et d'autre de sa position d'équilibre, avec une amplitude qui décroît à chaque oscillation : le régime est **pseudo-périodique**.

Logan neuve : régime apériodique. Amortisseurs fatigués : régime pseudo-périodique (oscillations amorties).

COMPRENDRE
Dans le régime pseudo-périodique, la durée d'une oscillation, appelée pseudo-période, reste voisine de la période propre T_0 tant que l'amortissement est faible.

5 Partie A, III (suspension). Sur une série de bosses distantes de D, l'amplitude des oscillations devient très grande. a) Nommer ce phénomène. b) Quelle période des excitations le provoque ? c) Calculer D pour qu'il se produise à 80 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$. d) Existe-t-il un autre moyen que ralentir pour l'éviter ?

Données utiles $T_0 = 0{,}71$ s (Q3) ; $v = 80\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$

a) Il s'agit de la **résonance** : l'amplitude des oscillations forcées passe par un maximum.

b) La résonance se produit quand la période des excitations est égale (ou très voisine) de la période propre de l'oscillateur : $\Delta t = T_0 = 0{,}71$ s.

c) À vitesse constante, la voiture parcourt la distance D entre deux bosses pendant $\Delta t = T_0$:

$$D = v\,T_0 = \frac{80}{3{,}6} \times 0{,}71 = 16\ \mathrm{m}$$

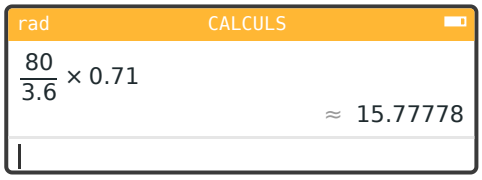
d) Oui : rouler nettement plus vite que 80 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$. La durée $\Delta t = \dfrac{D}{v}$ entre deux bosses devient alors bien plus petite que T_0 : on s'éloigne de la résonance et l'amplitude des oscillations reste faible. Ce moyen est évidemment dangereux et interdit.

Résonance, pour $\Delta t = T_0 = 0{,}71$ s ; $D = 16$ m ; on l'évite aussi en roulant beaucoup plus vite.

PIÈGE
Oublier de convertir la vitesse : $80 \times 0{,}71$ donnerait 57, un résultat qui n'est pas en mètres.

COMPRENDRE
L'amortissement de la Logan neuve est fort : la résonance est alors peu marquée, « floue ». Elle n'impose pas une vitesse précise, mais se ressent sur toute une plage de vitesses autour de 80 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

À LA CALCULATRICE



1 Partie B, I (bobine connue). Interrupteur fermé, régime permanent établi : montrer que l'intensité constante vaut $I_0 = \dfrac{E}{R_0 + r}$.

Données utiles $u_L(t) = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + r\,i$

Loi d'additivité des tensions dans le circuit : $E = u_L + u_{R_0}$.

Loi d'Ohm pour le conducteur ohmique : $u_{R_0} = R_0\,i$.

En régime permanent, $i = I_0$ est constante, donc $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$ et $u_L = r\,I_0$.

Ainsi $E = r\,I_0 + R_0\,I_0 = (R_0 + r)\,I_0$.

$$I_0 = \frac{E}{R_0 + r}$$

COMPRENDRE
La bobine et les circuits RL ne sont plus au programme actuel de spécialité. À retenir tout de même : en régime permanent, une bobine se comporte comme un simple conducteur ohmique de résistance r.

2 Partie B, I (bobine connue). À l'ouverture de l'interrupteur, $u_L(t) + u_{R_0}(t) = 0$. Établir l'équation différentielle vérifiée par l'intensité $i(t)$.

On remplace chaque tension par son expression, $u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + r\,i$ et $u_{R_0} = R_0\,i$:

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + r\,i + R_0\,i = 0$$

En divisant par L :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R_0 + r}{L}\,i = 0}$$

COMPRENDRE
C'est une équation du premier ordre de la forme $y' + \dfrac{y}{\tau} = 0$, comme pour la décharge d'un condensateur. Sa solution est $i(t) = I_0\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$ avec $\tau = \dfrac{L}{R_0 + r}$.

3 Partie B, I (bobine connue). a) D'après l'allure de $i(t)$ sur la figure 2, préciser le rôle de la bobine. b) Montrer que $\tau = \dfrac{L}{R_0 + r}$ a la dimension d'un temps. c) Calculer τ. d) Mesurer $i(\tau)$ sur le graphique.

Données utiles $L = 0{,}94\ \mathrm{H}$; $R_0 = 150\ \Omega$; $r = 20\ \Omega$

a) À l'ouverture de l'interrupteur, l'intensité ne tombe pas brutalement à zéro : elle décroît progressivement, en 30 ms environ. La bobine s'oppose à la variation du courant : elle retarde son annulation.

b) D'après $u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ (bobine idéale) : $[L] = \dfrac{[U]\,\mathrm{T}}{[I]}$. D'après la loi d'Ohm $u = R\,i$: $[R] = \dfrac{[U]}{[I]}$.

$$[\tau] = \frac{[L]}{[R]} = \frac{[U]\,\mathrm{T}}{[I]} \times \frac{[I]}{[U]} = \mathrm{T}$$

τ a bien la dimension d'un temps.

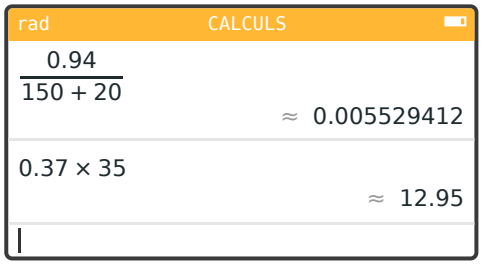
c) $\tau = \dfrac{L}{R_0 + r} = \dfrac{0{,}94}{150 + 20} = 5{,}5 \times 10^{-3}\ \mathrm{s}$

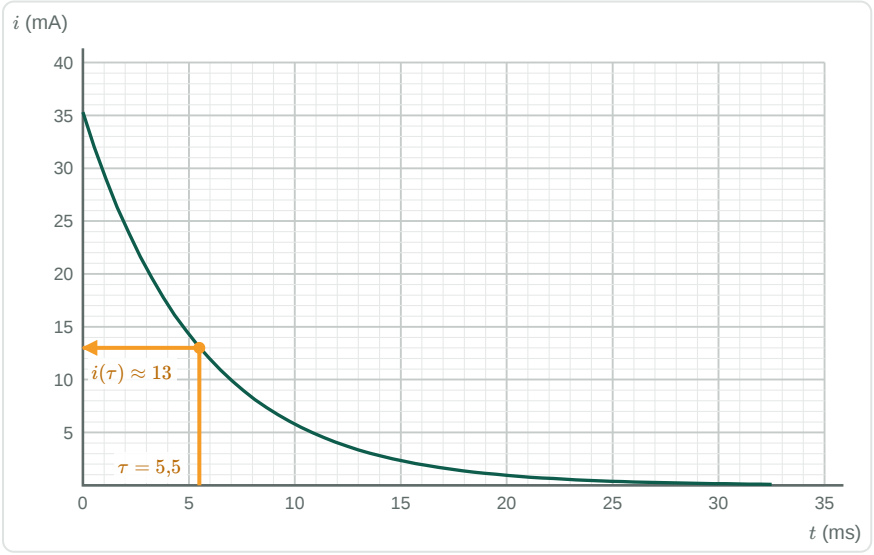
d) Sur la figure 2, le point de la courbe d'abscisse $t = 0{,}0055$ s a pour ordonnée $0{,}013$ A.

$$\boxed{\tau = 5{,}5\ \mathrm{ms}\ ;\ i(\tau) \approx 13\ \mathrm{mA}}$$

MÉTHODE
Contrôle de la lecture : à $t = \tau$, une exponentielle décroissante vaut 37 % de sa valeur initiale, ici 35 mA à $t = 0$. Or $0{,}37 \times 35 = 13$ mA : la mesure est cohérente.

À LA CALCULATRICE





3 · Figure 2 du sujet (échelles en ms et en mA), avec la lecture de $i(\tau)$

1 Partie B, II (bobine de l'injecteur). À l'aide de la figure 3, déterminer la résistance interne r' de la bobine, sachant que $I'_0 = \dfrac{E}{R_0 + r'}$.

Données utiles $E = 6{,}0$ V ; $R_0 = 150\ \Omega$

I'_0 est l'intensité à l'instant où l'on ouvre l'interrupteur. Sur la figure 3, à $t = 0$: $I'_0 = 0{,}035$ A.

De $I'_0 = \dfrac{E}{R_0 + r'}$, on tire $R_0 + r' = \dfrac{E}{I'_0}$, soit :

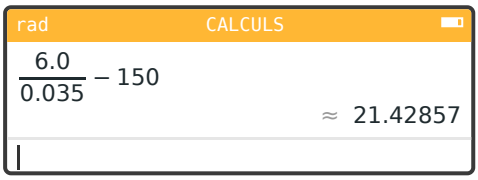
$$r' = \frac{E}{I'_0} - R_0 = \frac{6{,}0}{0{,}035} - 150 = 21\ \Omega$$

$\boxed{r' = 21\ \Omega}$

COMPRENDRE

Ce résultat est très sensible à la lecture : avec $I'_0 = 0{,}036$ A, on trouverait $17\ \Omega$. Le graphique ne donne donc que l'ordre de grandeur, une vingtaine d'ohms.

À LA CALCULATRICE



2 Partie B, II (bobine de l'injecteur). a) Évaluer graphiquement la constante de temps τ'. b) Déterminer l'inductance L' de la bobine.

Données utiles $I'_0 = 0{,}035$ A et $r' = 21\ \Omega$ (Q1) ; $R_0 = 150\ \Omega$

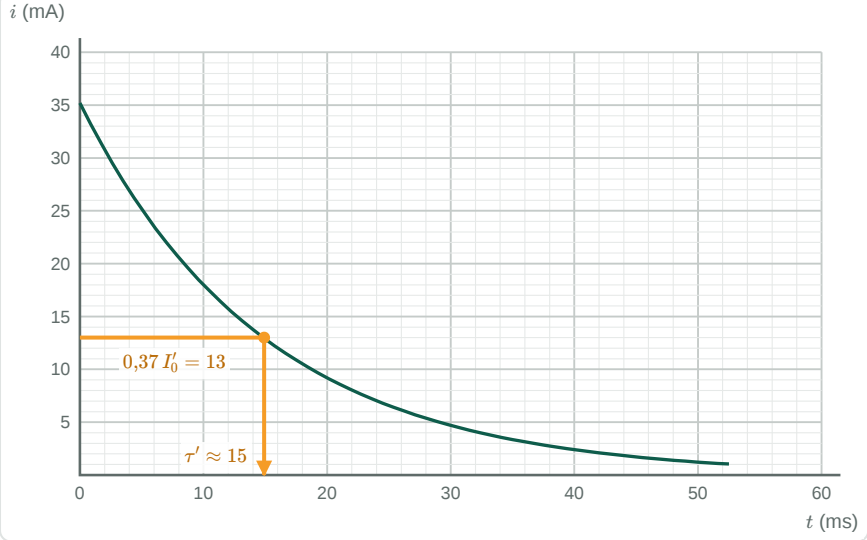
a) À la date $t = \tau'$, l'intensité vaut 37 % de sa valeur initiale : $i(\tau') = 0{,}37 \times 0{,}035 = 0{,}013$ A.

Sur la figure 3, le point de la courbe d'ordonnée $0{,}013$ A a pour abscisse $0{,}015$ s : $\tau' = 0{,}015$ s.

b) Par analogie avec l'étude précédente, $\tau' = \dfrac{L'}{R_0 + r'}$, donc :

$$L' = (R_0 + r')\,\tau' = (150 + 21) \times 0{,}015 = 2{,}6\ \text{H}$$

$\tau' = 15$ ms ; $L' = 2{,}6$ H



2 · Figure 3 complétée (échelles en ms et en mA) : lecture de τ' à $0{,}37\,I'_0$

COMPRENDRE

τ' est lue à 1 ms près environ : L' est donc connue à 0,2 H près, et toute valeur comprise entre 2,4 et 2,8 H est acceptable.

MÉTHODE

Autre tracé possible : la tangente à la courbe à $t = 0$ coupe l'axe des temps en $t = \tau'$. Il est moins précis qu'une lecture à 37 %.

À LA CALCULATRICE

