Principe d'une minuterie

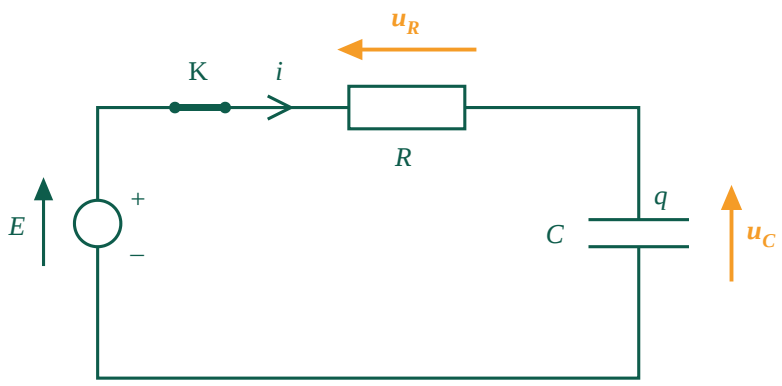
Bac S 2006 Centres étrangers (ancien programme) · Exercice 1 **5,5 points** **Durée conseillée 1 h 05**

1.1 En convention récepteur, représenter sur la figure 1 de l'annexe les flèches des tensions u_C et u_R.

En convention récepteur, la flèche de la tension aux bornes d'un dipôle est de sens opposé à celui de la flèche du courant qui le traverse.

Flèche u_R : au-dessus du conducteur ohmique, pointe vers l'interrupteur K. Flèche u_C : le long du condensateur, pointe vers l'armature qui porte la charge q.

PIÈGE
Orienter u_C vers l'armature négative. Avec le sens choisi pour i, le courant arrive sur l'armature de charge q : la pointe de la flèche u_C est de ce côté.



1.1 · Figure 1 de l'annexe complétée : flèches des tensions en orange

1.2 Donner l'expression de u_R en fonction de i.

Loi d'Ohm, en convention récepteur :

$$u_R = R\,i$$

1.3 Donner l'expression de i en fonction de la charge q du condensateur.

L'intensité est le débit de charge arrivant sur l'armature qui porte q :

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

COMPRENDRE
Il n'y a pas de signe « $-$ » parce que le courant, dans le sens positif choisi, arrive sur l'armature de charge q : quand $i > 0$, q augmente.

1.4 Donner la relation liant q et u_C.

$$q = C\,u_C$$

1.5 En déduire l'expression de i en fonction de la capacité C et de la tension u_C.

$i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}(C\,u_C)}{\mathrm{d}t}$ et la capacité C est constante, donc :

$$i = C\,\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$$

1.6 En appliquant la loi d'additivité des tensions, établir une relation entre E, u_R et u_C.

Interrupteur fermé, la tension aux bornes du générateur est la somme des tensions aux bornes des deux dipôles en série :

$$E = u_R + u_C$$

1.7 Établir l'équation différentielle (1) à laquelle obéit u_C.

Dans $E = u_R + u_C$, on remplace u_R par $R\,i$ (1.2) puis i par $C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ (1.5) :

$$R\,C\,\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = E \quad (1)$$

MÉTHODE
Toujours le même enchaînement pour un dipôle RC : loi des mailles, loi d'Ohm, $i = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t$, $q = C\,u_C$. On obtient une équation où ne restent que u_C et sa dérivée.

1.8.1 Vérifier que $u_C = E\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$, avec $\tau = RC$, est solution de l'équation différentielle (1).

$u_C = E - E\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$, donc $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \dfrac{E}{\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$.

Membre de gauche de (1), avec $RC = \tau$:

$$\tau \times \frac{E}{\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + E - E\,\mathrm{e}^{-t/\tau} = E$$

On retrouve le membre de droite E à toute date t : la fonction proposée est bien solution de (1).

PIÈGE
La dérivée de $\mathrm{e}^{-t/\tau}$ est $-\dfrac{1}{\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$. Oublier le facteur $-1/\tau$ empêche les exponentielles de se simplifier.

1.8.2 Vérifier que $u_C = E\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$ respecte la condition initiale.

Le condensateur est déchargé à la fermeture de K : la condition initiale est $u_C(0) = 0$.

$u_C(0) = E\left(1 - \mathrm{e}^{0}\right) = E\,(1 - 1) = 0$: la condition initiale est respectée.

1.9.1 Par une analyse dimensionnelle, vérifier que le produit $\tau = RC$ est homogène à une durée.

$u_R = R\,i$ donne $[R] = \dfrac{[U]}{[I]}$.

$i = C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ donne $[I] = [C]\,\dfrac{[U]}{[T]}$, soit $[C] = \dfrac{[I]\,[T]}{[U]}$.

$[RC] = \dfrac{[U]}{[I]} \times \dfrac{[I]\,[T]}{[U]} = [T]$: le produit RC est homogène à une durée.

MÉTHODE
Pour trouver la dimension d'une grandeur, partir d'une relation connue qui la contient et l'isoler. Ici, les deux relations utiles sont celles des questions 1.2 et 1.5.

1.9.2 Déterminer graphiquement la valeur de τ sur la courbe $u_C = f(t)$ de l'annexe, en faisant figurer la construction.

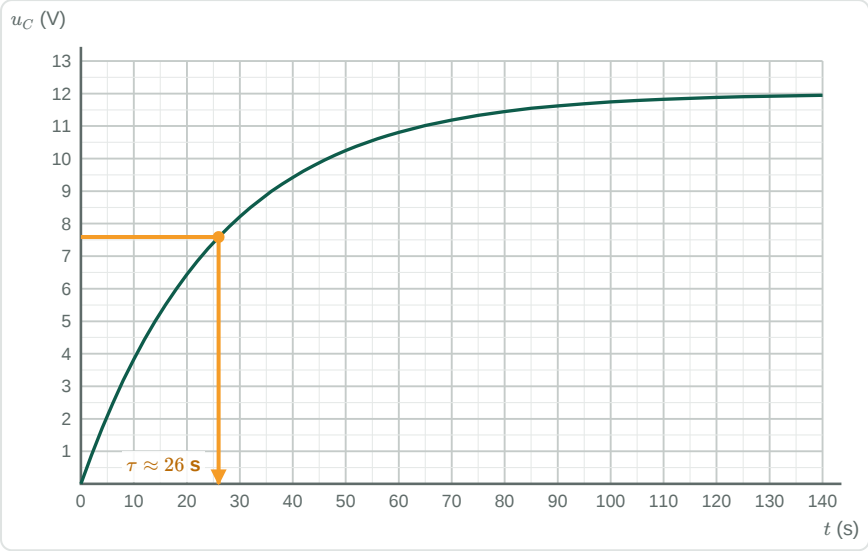
Données utiles $E = 12{,}0$ V

À la date $t = \tau$: $u_C(\tau) = E\left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right) = 12{,}0 \times \left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right) = 7{,}59$ V, soit 63 % de E.

On trace l'horizontale d'ordonnée 7,6 V jusqu'à la courbe, puis on lit l'abscisse du point d'intersection.

$\tau \approx 26$ s

COMPRENDRE
Une graduation vaut 5 s : la lecture se fait à 1 ou 2 s près, toute valeur entre 25 et 28 s est acceptable. Autre méthode : la tangente à l'origine coupe l'asymptote $u_C = E$ à la date τ.



À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$12.0 \times (1 - e^{-1}) \approx 7.585447$

1.9.2 · Figure 2 de l'annexe : lecture de τ à 63 % de E, soit $u_C(\tau) = 7{,}59$ V

1.9.3 En déduire la valeur de la résistance R, avec deux chiffres significatifs.

Données utiles $\tau \approx 26$ s (1.9.2) ; $C = 120\ \mu\text{F}$

$\tau = RC$ donc $R = \dfrac{\tau}{C}$

$$R = \frac{26}{120 \times 10^{-6}}$$

$R = 2{,}2 \times 10^5\ \Omega$

PIÈGE

Laisser la capacité en microfarads : $120\ \mu\text{F} = 120 \times 10^{-6}$ F. Sans cette conversion, le résultat est un million de fois trop petit.

COMPRENDRE

Deux chiffres significatifs, comme le demande l'énoncé : la lecture graphique de τ n'en fournit pas davantage. Avec $\tau = 27$ s, on obtiendrait $2{,}3 \times 10^5\ \Omega$, résultat tout aussi recevable.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\dfrac{26}{120 \times 10^{-6}} \approx 216666.7$

2.1 Le condensateur est chargé sous 12 V et la lampe est éteinte. On appuie sur le bouton poussoir P : que devient u_C pendant le contact ? La lampe s'allume-t-elle ?

Données utiles $u_{al} = 6{,}0$ V

Le bouton poussoir enfoncé équivaut à un fil sans résistance entre les deux armatures : le condensateur se décharge instantanément et u_C passe de 12 V à 0 V.

$u_C = 0\ \text{V} < u_{al}$: la lampe s'allume.

2.2.1 On relâche le bouton poussoir. Comment évolue qualitativement la tension aux bornes du condensateur au cours du temps ?

Le bouton relâché est un interrupteur ouvert : on retrouve le circuit de la figure 1, avec un condensateur déchargé relié au générateur à travers R.

Le condensateur se charge : u_C augmente à partir de 0 V, de moins en moins vite, et tend vers $E = 12$ V.

2.2.2 La constante de temps du dipôle RC est $\tau = 25$ s. Comment évolue l'état de la lampe aussitôt après avoir relâché le bouton poussoir ?

La charge n'est pas instantanée ($\tau = 25$ s) : juste après le relâchement, u_C est encore proche de 0 V, donc inférieure à u_{al}.

La lampe reste allumée tant que $u_C < 6{,}0$ V, puis elle s'éteint dès que u_C atteint u_{al}.

COMPRENDRE
C'est le principe de la minuterie : le retard à la charge du condensateur fixe la durée d'éclairage, sans aucune intervention de l'utilisateur après l'appui.

2.2.3 Donner l'expression littérale de la date t_{al} à laquelle u_C atteint la valeur limite u_{al}, en fonction de u_{al}, E et τ.

À la date t_{al} : $u_{al} = E\left(1 - \mathrm{e}^{-t_{al}/\tau}\right)$

$$\mathrm{e}^{-t_{al}/\tau} = 1 - \frac{u_{al}}{E} = \frac{E - u_{al}}{E}$$

$$-\frac{t_{al}}{\tau} = \ln\left(\frac{E - u_{al}}{E}\right)$$

$$t_{al} = \tau \ln\left(\frac{E}{E - u_{al}}\right)$$

MÉTHODE
Pour extraire une date d'une exponentielle : isoler l'exponentielle seule dans un membre, puis prendre le logarithme népérien. Le signe « $-$ » disparaît en inversant la fraction : $-\ln(a/b) = \ln(b/a)$.

2.2.4 Calculer la valeur de t_{al}, durée d'allumage de la lampe.

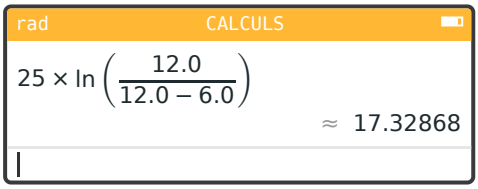
Données utiles $\tau = 25$ s ; $E = 12{,}0$ V ; $u_{al} = 6{,}0$ V

$$t_{al} = 25 \times \ln\left(\frac{12{,}0}{12{,}0 - 6{,}0}\right) = 25 \times \ln 2$$

$t_{al} = 17$ s

COMPRENDRE
Comme $u_{al} = E/2$, la durée d'allumage vaut $\tau \ln 2 \approx 0{,}69\,\tau$: la lampe s'éteint avant que la date τ soit atteinte.

À LA CALCULATRICE

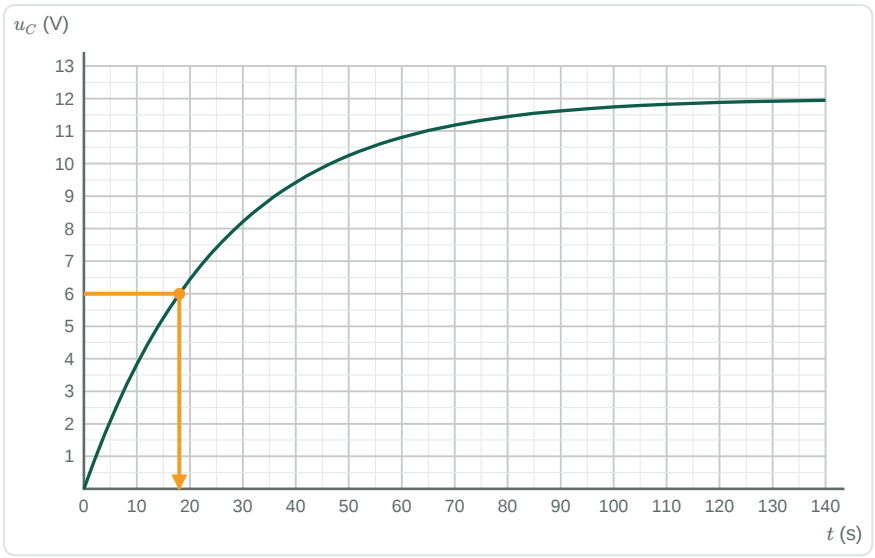


2.2.5 Retrouver graphiquement la valeur de t_{al} sur la courbe $u_C = f(t)$ de l'annexe et indiquer cette durée sur le graphe.

On trace l'horizontale d'ordonnée $u_{al} = 6{,}0$ V jusqu'à la courbe et on lit l'abscisse du point d'intersection.

$t_{al} \approx 18$ s, valeur compatible avec les 17 s calculées.

COMPRENDRE
Le léger écart est normal : la courbe de l'annexe correspond à $\tau \approx 26$ s (1.9.2), alors que le calcul utilise $\tau = 25$ s. Avec 26 s, la formule donne bien 18 s.



2.2.5 · Figure 2 de l'annexe : $u_C = u_{al} = 6{,}0$ V est atteinte à $t_{al} \approx 18$ s

2.3 La tension E étant constante, sur quels paramètres du circuit de la figure 1 peut-on agir pour augmenter la durée d'allumage, et dans quel sens ?

$t_{al} = \tau \ln\left(\dfrac{E}{E - u_{al}}\right)$ avec $\tau = RC$: à E et u_{al} fixées, la durée d'allumage est proportionnelle à R et à C.

Il faut augmenter la résistance R ou la capacité C (ou les deux).