A propos des noyaux d'argent

Bac S 2006 Asie (ancien programme) · Exercice 3 **5,5 points** **Durée conseillée 1 h 05**

1.1 Rappeler les deux lois de conservation qui permettent d'écrire l'équation d'une réaction nucléaire.

Au cours d'une réaction nucléaire, il y a :

- conservation du nombre de charge : la somme des Z est la même avant et après ;
- conservation du nombre de masse (nombre de nucléons) : la somme des A est la même avant et après.

Conservation du nombre de charge Z et conservation du nombre de nucléons A.

PIÈGE
Écrire « conservation de la masse » : la masse n'est pas conservée dans une réaction nucléaire, c'est le nombre de nucléons qui l'est. Les éléments chimiques ne sont pas conservés non plus.

1.2 Écrire l'équation de la réaction de capture d'un neutron par un noyau d'argent 107.

Données utiles argent : $Z = 47$

Le neutron ne porte pas de charge et compte pour un nucléon : il se note ${}^{1}_{0}\mathrm{n}$.

$${}^{107}_{47}\mathrm{Ag} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \longrightarrow {}^{108}_{47}\mathrm{Ag}$$

COMPRENDRE
Vérification : $107 + 1 = 108$ nucléons et $47 + 0 = 47$ charges. Le numéro atomique ne change pas : le noyau formé est un isotope de l'argent.

2.1 Rappeler la nature des particules émises au cours des radioactivités β^- et β^+. Écrire leur symbole.

Radioactivité β^- : émission d'un électron, de symbole ${}^{0}_{-1}\mathrm{e}$.

Radioactivité β^+ : émission d'un positon (antiparticule de l'électron, de charge $+e$), de symbole ${}^{0}_{1}\mathrm{e}$.

β^- : électron ${}^{0}_{-1}\mathrm{e}$; β^+ : positon ${}^{0}_{1}\mathrm{e}$.

COMPRENDRE
L'électron et le positon ne sont pas des nucléons, d'où $A = 0$. L'indice du bas est le nombre de charge : -1 pour l'électron, $+1$ pour le positon.

2.2 Écrire les équations correspondant à chacune des transformations radioactives pour l'argent 108.

Données utiles Rh ($Z = 45$) ; Pd ($Z = 46$) ; Ag ($Z = 47$) ; Cd ($Z = 48$) ; In ($Z = 49$)

Désintégration β^- : ${}^{108}_{47}\mathrm{Ag} \longrightarrow {}^{A}_{Z}\mathrm{X} + {}^{0}_{-1}\mathrm{e}$. Conservation des nucléons : $A = 108$. Conservation de la charge : $47 = Z - 1$, donc $Z = 48$: le noyau fils est un noyau de cadmium.

Désintégration β^+ : ${}^{108}_{47}\mathrm{Ag} \longrightarrow {}^{A'}_{Z'}\mathrm{Y} + {}^{0}_{1}\mathrm{e}$. De même $A' = 108$ et $47 = Z' + 1$, donc $Z' = 46$: le noyau fils est un noyau de palladium.

$$\beta^- : {}^{108}_{47}\mathrm{Ag} \longrightarrow {}^{108}_{48}\mathrm{Cd} + {}^{0}_{-1}\mathrm{e} \qquad \beta^+ : {}^{108}_{47}\mathrm{Ag} \longrightarrow {}^{108}_{46}\mathrm{Pd} + {}^{0}_{1}\mathrm{e}$$

PIÈGE
Se tromper de sens : en β^-, Z augmente d'une unité (un neutron devient un proton) ; en β^+, Z diminue d'une unité.

MÉTHODE
Poser le noyau fils inconnu ${}^{A}_{Z}\mathrm{X}$, appliquer les deux lois de conservation, puis chercher Z dans l'extrait de classification pour trouver le symbole.

3.1 Rappeler l'expression de N en fonction de N_0, de t et de la constante radioactive λ.

Loi de décroissance radioactive :

$$N(t) = N_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$$

PIÈGE
Oublier le signe « $-$ » dans l'exponentielle : le nombre de noyaux restants diminue au cours du temps.

3.2 Donner la définition de la demi-vie radioactive $t_{1/2}$.

La demi-vie $t_{1/2}$ est la durée au bout de laquelle la moitié des noyaux radioactifs initialement présents dans l'échantillon se sont désintégrés : $N(t_{1/2}) = \dfrac{N_0}{2}$.

COMPRENDRE
Cette durée ne dépend pas de l'instant choisi comme origine : à chaque demi-vie écoulée, le nombre de noyaux restants est de nouveau divisé par deux.

3.3 Sachant que $t_{1/2} = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$, quelle est l'unité de λ ?

On isole la constante radioactive : $\lambda = \dfrac{\ln 2}{t_{1/2}}$.

$\ln 2$ est un nombre sans unité et $t_{1/2}$ est une durée, en secondes. λ est donc l'inverse d'une durée.

λ s'exprime en s^{-1}.

COMPRENDRE
On le retrouve avec la loi de décroissance : l'exposant $-\lambda t$ d'une exponentielle doit être sans unité, donc λ est en s^{-1} si t est en s.

3.4.1 Montrer que l'activité, définie par $A = -\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}$, peut aussi s'exprimer par $A = \lambda N$.

Données utiles $N(t) = N_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$ (3.1)

On dérive $N(t) = N_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$ par rapport au temps :

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\lambda\,N_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$$

Donc $A = -\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \lambda\,N_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$, où l'on reconnaît $N_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t} = N$.

$A = \lambda\,N_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t} = \lambda N$

MÉTHODE
La dérivée de e^{kt} par rapport à t est $k\,\mathrm{e}^{kt}$; ici $k = -\lambda$. Le signe « $-$ » de la définition rend l'activité positive.

3.4.2 Exprimer n_1 en fonction de Δt, N_0, t et λ.

Données utiles $A = \dfrac{n_1}{\Delta t}$; $A = \lambda N$ (3.4.1)

$A = \dfrac{n_1}{\Delta t}$ donne $n_1 = A\,\Delta t = \lambda\,N\,\Delta t$, avec $N = N_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$.

$n_1 = \lambda\,\Delta t\,N_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$

COMPRENDRE
Écrire $A = \dfrac{n_1}{\Delta t}$ suppose que l'activité ne varie presque pas pendant le comptage : c'est pourquoi Δt doit être très petite devant $t_{1/2}$.

3.4.3 En déduire l'expression de $\ln(n_1)$ en fonction de Δt, N_0, t et λ.

Données utiles $n_1 = \lambda\,\Delta t\,N_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$ (3.4.2)

On prend le logarithme népérien des deux membres, avec $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$ et $\ln(\mathrm{e}^x) = x$:

$\ln(n_1) = \ln(\lambda\,\Delta t\,N_0) + \ln(\mathrm{e}^{-\lambda t})$

$\ln(n_1) = \ln(\lambda\,\Delta t\,N_0) - \lambda\,t$

COMPRENDRE
λ, Δt et N_0 sont des constantes : $\ln(n_1)$ est une fonction affine du temps, de coefficient directeur $-\lambda$.

4.1 La représentation graphique de $\ln(n_1)$ en fonction du temps est-elle en accord avec la relation trouvée à la question 3 ?

Données utiles $\ln(n_1) = \ln(\lambda\,\Delta t\,N_0) - \lambda\,t$ (3.4.3)

Le sujet renvoie à la question 3.4.2 ; la relation utile ici est celle de la question 3.4.3, qui en découle.

Les points du graphe sont alignés sur une droite décroissante qui ne passe pas par l'origine : $\ln(n_1) = a\,t + b$, avec $a < 0$.

La relation théorique est de la même forme, avec $a = -\lambda$ (négatif) et $b = \ln(\lambda\,\Delta t\,N_0)$ (constante).

Oui : le graphe est une droite décroissante, comme le prévoit $\ln(n_1) = \ln(\lambda\,\Delta t\,N_0) - \lambda\,t$.

MÉTHODE
Pour confronter un graphe à une loi : nommer la forme de la courbe, écrire son équation, puis identifier terme à terme avec la relation théorique.

4.2 En utilisant le graphe, déterminer λ et N_0.

Données utiles $\Delta t = 0{,}50$ s ; $a = -\lambda$ et $b = \ln(\lambda\,\Delta t\,N_0)$ (4.1)

Coefficient directeur, avec deux points de la droite éloignés, $(100\text{ s}; 5{,}96)$ et $(200\text{ s}; 5{,}54)$:

$$a = \frac{5{,}54 - 5{,}96}{200 - 100} = -4{,}2 \times 10^{-3}\ \text{s}^{-1} \quad \text{donc} \quad \lambda = -a = 4{,}2 \times 10^{-3}\ \text{s}^{-1}$$

Ordonnée à l'origine : en prolongeant la droite jusqu'à $t = 0$, on lit $b \approx 6{,}4$.

$b = \ln(\lambda\,\Delta t\,N_0)$ donne $\lambda\,\Delta t\,N_0 = \text{e}^b$, soit $N_0 = \dfrac{\text{e}^b}{\lambda\,\Delta t}$:

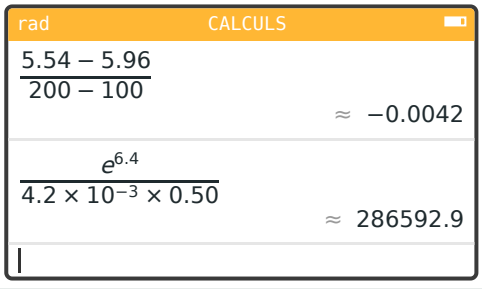
$$N_0 = \frac{\text{e}^{6{,}4}}{4{,}2 \times 10^{-3} \times 0{,}50} = 2{,}9 \times 10^5$$

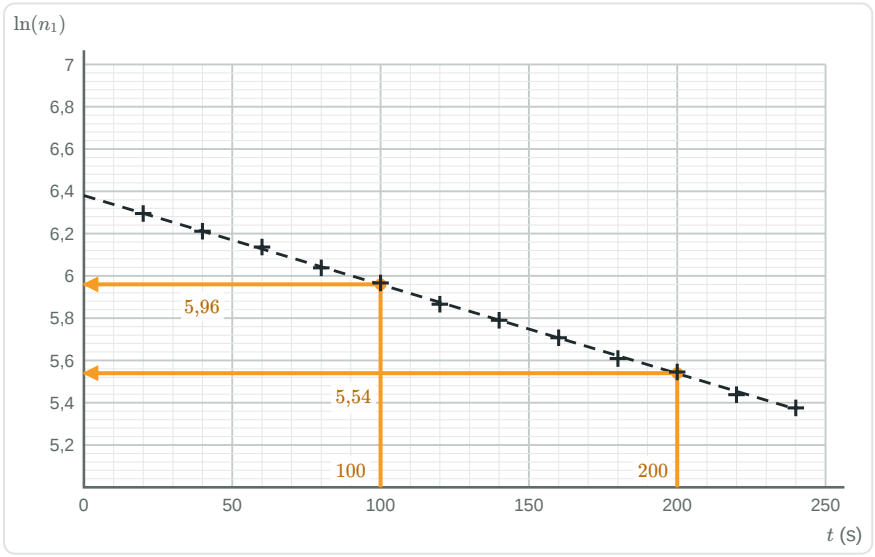
$\lambda = 4{,}2 \times 10^{-3}\ \text{s}^{-1}$ et $N_0 \approx 2{,}9 \times 10^5$ noyaux

PIÈGE
Prendre l'ordonnée $6{,}3$ du premier point pour b : ce point est à $t = 20$ s, pas à $t = 0$. Autre erreur : oublier Δt et écrire $N_0 = \text{e}^b/\lambda$.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme Δt et la précision des lectures. N_0 est très sensible à b : lire $6{,}38$ au lieu de $6{,}4$ donne $2{,}8 \times 10^5$. Les deux valeurs sont acceptables.

À LA CALCULATRICE





4.2 · Graphe du sujet : droite prolongée jusqu'à t = 0 et lectures utilisées

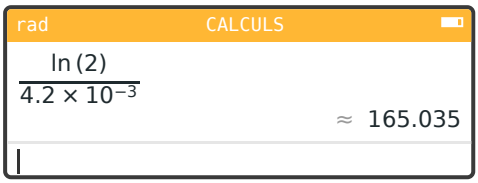
4.3 En déduire la demi-vie $t_{1/2}$ de l'argent 108.

Données utiles $\lambda = 4{,}2 \times 10^{-3}\ \text{s}^{-1}$ (4.2)

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{\ln 2}{4{,}2 \times 10^{-3}} = 165\ \text{s}$$

$t_{1/2} \approx 1{,}7 \times 10^{2}\ \text{s}$ (environ 165 s, soit un peu moins de 3 min)

À LA CALCULATRICE



PIÈGE

Annoncer la demi-vie avec trop de chiffres : λ vient d'une lecture graphique à deux chiffres significatifs, la demi-vie n'est donc connue qu'à quelques secondes près.

COMPRENDRE

Contrôle sur le tableau : n_1 est proportionnel à N. De $t = 20$ s à $t = 180$ s, soit 160 s, n_1 passe de 542 à 273, environ la moitié : c'est cohérent.