Décharge d'un condensateur

Bac S 2006 Antilles-Guyane rattrapage (ancien programme) · Exercice 1 **5 points** **Durée conseillée 1 h 05**

1.1 Quelle relation lie u_R et u_C ?

Le circuit ne comporte qu'une maille. Loi des mailles (additivité des tensions), avec les flèches du schéma :

$u_C + u_R = 0$, soit $u_R = -u_C$

COMPRENDRE
Les deux dipôles sont branchés aux mêmes points. La flèche u_C pointe vers A, la flèche u_R vers la borne reliée à B : les deux tensions sont opposées.

1.2 Rappeler la relation qui lie la charge q_A de l'armature A à la tension u_C.

La flèche de u_C pointe vers l'armature A, donc :

$q_A = C\,u_C$

1.3 Quel est le signe de i ? Établir la relation liant l'intensité i à la tension u_C.

Pendant la charge, le courant compté positivement arrive sur l'armature A. Pendant la décharge, le courant circule dans l'autre sens : i est **négative**.

Avec cette orientation, $i = \dfrac{\mathrm{d}q_A}{\mathrm{d}t}$. Comme $q_A = C\,u_C$ et que C est constante :

$i < 0$ et $i = C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$

COMPRENDRE
Vérification : pendant la décharge, u_C diminue, donc $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} < 0$ et la relation redonne bien $i < 0$.

1.4 Montrer que l'équation différentielle vérifiée par u_C s'écrit $\alpha\,u_C + \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = 0$ et exprimer α en fonction de R et C.

Loi d'Ohm, avec l'orientation choisie pour i : $u_R = R\,i$.

La relation de 1.1 devient $u_C + R\,i = 0$, puis avec 1.3 :

$$u_C + RC\,\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = 0$$

En divisant par RC : $\dfrac{1}{RC}\,u_C + \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = 0$.

$\alpha\,u_C + \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = 0$ avec $\alpha = \dfrac{1}{RC}$

MÉTHODE
Équation d'un circuit RC en trois temps : loi des mailles, loi d'Ohm, puis $i = C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ pour ne garder que u_C.

2.1 En utilisant l'équation différentielle, montrer que $\beta = \dfrac{1}{RC}$.

Si $u_C = A\,\mathrm{e}^{-\beta t}$, alors $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = -\beta A\,\mathrm{e}^{-\beta t}$.

On reporte dans l'équation différentielle :

$$\frac{1}{RC}\,A\,\mathrm{e}^{-\beta t} - \beta A\,\mathrm{e}^{-\beta t} = 0 \quad \text{soit} \quad A\,\mathrm{e}^{-\beta t}\left(\frac{1}{RC} - \beta\right) = 0$$

Cette égalité doit être vraie à chaque instant. Or $A \neq 0$ et une exponentielle ne s'annule jamais, donc $\dfrac{1}{RC} - \beta = 0$.

$\beta = \dfrac{1}{RC}$

PIÈGE
Oublier le signe « − » en dérivant $\mathrm{e}^{-\beta t}$, ou conclure sans dire pourquoi le facteur $A\,\mathrm{e}^{-\beta t}$ ne peut pas être nul.

2.2 Déterminer la valeur de A.

Données utiles $u_C(0) = U_0 = 10$ V

Condition initiale : $u_C(0) = A\,\mathrm{e}^0 = A$. Or $u_C(0) = U_0$.

$A = U_0 = 10$ V

2.3 Indiquer, parmi les courbes 1 et 2, celle qui peut représenter u_C. Justifier.

$u_C = U_0\,\mathrm{e}^{-t/RC}$ vaut $U_0 = 10$ V à $t = 0$, puis décroît et tend vers 0. La courbe 2 part de 0 et augmente : elle correspond à une charge.

La courbe 1 représente u_C.

2.4 Donner l'expression littérale de la constante de temps τ.

On écrit $u_C = U_0\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$, donc $\tau = \dfrac{1}{\beta}$.

$\tau = RC$

2.5 Montrer par analyse dimensionnelle que τ a la même unité qu'une durée.

Loi d'Ohm : $R = \dfrac{u_R}{i}$, donc $[R] = \dfrac{[U]}{[I]}$.

Relation de 1.3 : $C = \dfrac{i}{\mathrm{d}u_C/\mathrm{d}t}$, donc $[C] = \dfrac{[I]\,[T]}{[U]}$.

$$[\tau] = [R]\,[C] = \frac{[U]}{[I]} \times \frac{[I]\,[T]}{[U]} = [T]$$

$\tau = RC$ a la dimension d'une durée : elle s'exprime en secondes.

MÉTHODE

Pour la dimension d'une grandeur électrique, partir d'une relation connue qui la contient (ici $u = R\,i$ et $i = C\,\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$) et tout ramener à $[U]$, $[I]$ et $[T]$.

2.6 Déterminer sur la courbe choisie la valeur de la constante de temps τ du circuit.

Données utiles courbe 1 ; $U_0 = 10$ V

À $t = \tau$: $u_C(\tau) = U_0\,\mathrm{e}^{-1} = 0{,}37 \times 10 = 3{,}7$ V.

Sur la courbe 1, l'ordonnée 3,7 V correspond à l'abscisse $t \approx 0{,}07$ s.

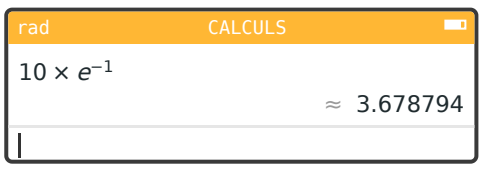
La tangente à l'origine coupe l'axe des temps à la même date.

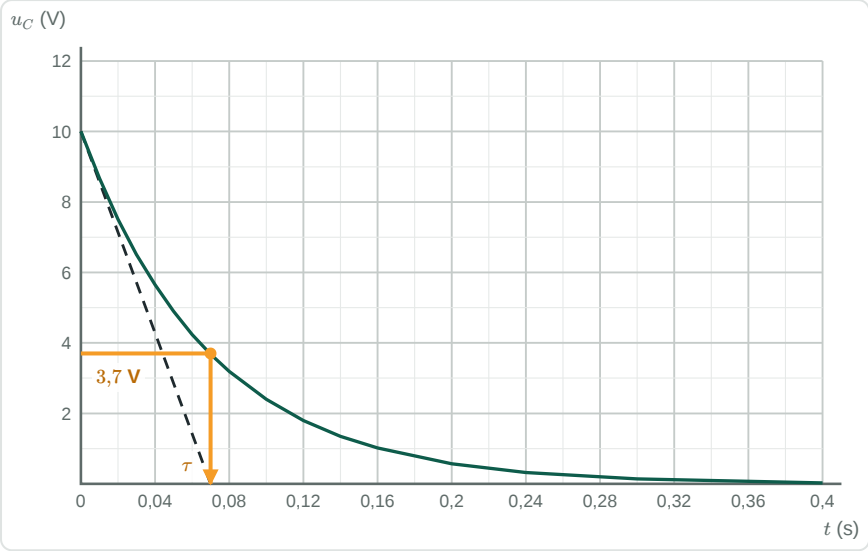
$\tau \approx 0{,}07$ s

COMPRENDRE

Une graduation vaut 0,02 s : la lecture donne τ à environ 0,01 s près, donc avec un seul chiffre significatif. Les résultats qui en découlent ne peuvent pas être plus précis.

À LA CALCULATRICE





2.6 · Courbe 1 du sujet : lecture de τ à 37 % de U_0 et tangente à l'origine

2.7 Sachant que $R = 33\ \Omega$, en déduire la valeur de la capacité C du condensateur.

Données utiles $R = 33\ \Omega$; $\tau \approx 0{,}07$ s (2.6)

$\tau = RC$ donc $C = \dfrac{\tau}{R}$.

$$C = \frac{0{,}07}{33} = 2 \times 10^{-3}\ \text{F}$$

$$C \approx 2 \times 10^{-3}\ \text{F} = 2\ \text{mF}$$

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\dfrac{0.07}{33}$

$\approx$ 0.002121212

3.1 En utilisant les résultats précédents, montrer que $i = -\dfrac{U_0}{R}\,\mathrm{e}^{-t/RC}$.

D'après 2.1 et 2.2 : $u_C = U_0\,\mathrm{e}^{-t/RC}$, donc $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{U_0}{RC}\,\mathrm{e}^{-t/RC}$.

D'après 1.3 : $i = C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{C\,U_0}{RC}\,\mathrm{e}^{-t/RC}$.

$$i = -\frac{U_0}{R}\,\mathrm{e}^{-t/RC}$$

COMPRENDRE

Autre chemin, plus court : $u_C + R\,i = 0$ (1.4) donne directement $i = -\dfrac{u_C}{R}$.

3.2 Déterminer la valeur I_0 de i à $t = 0$.

Données utiles $U_0 = 10$ V ; $R = 33\ \Omega$

À $t = 0$, l'exponentielle vaut 1 : $I_0 = -\dfrac{U_0}{R}$.

$$I_0 = -\frac{10}{33} = -0{,}30\ \text{A}$$

$$I_0 = -0{,}30\ \text{A}$$

COMPRENDRE

Deux chiffres significatifs, comme U_0 et R.
L'intensité passe d'un coup de 0 à I_0 : contrairement à u_C, elle peut être discontinue.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\dfrac{-10}{33}$

$\approx$ −0.3030303

3.3 En justifiant, indiquer parmi les quatre courbes celle qui peut représenter i.

i est négative à chaque instant, vaut $I_0 = -\dfrac{U_0}{R}$ à $t = 0$, puis tend vers 0 quand t augmente. Les courbes 1 et 2 sont positives ; la courbe 4 part de 0.

La courbe 3 représente i.

3.4 Calculer la valeur de i pour $t = 0{,}50$ s.

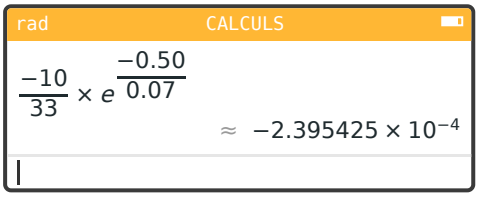
Données utiles $U_0 = 10$ V ; $R = 33\ \Omega$; $RC = \tau \approx 0{,}07$ s (2.6)

$$i(0{,}50) = -\frac{U_0}{R}\,\mathrm{e}^{-t/\tau} = -\frac{10}{33} \times \mathrm{e}^{-0{,}50/0{,}07} = -2 \times 10^{-4}\ \mathrm{A}$$

$i(0{,}50) \approx -2 \times 10^{-4}\ \mathrm{A} = -0{,}2\ \mathrm{mA}$

PIÈGE
Oublier les parenthèses autour de l'exposant à la calculatrice, ou perdre le signe « − » de l'intensité.

À LA CALCULATRICE



3.5 Déterminer la valeur de u_C à la même date.

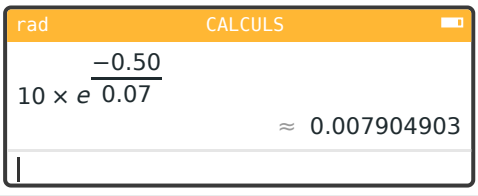
Données utiles $U_0 = 10$ V ; $\tau \approx 0{,}07$ s (2.6)

$$u_C(0{,}50) = U_0\,\mathrm{e}^{-t/\tau} = 10 \times \mathrm{e}^{-0{,}50/0{,}07} = 8 \times 10^{-3}\ \mathrm{V}$$

$u_C(0{,}50) \approx 8 \times 10^{-3}\ \mathrm{V} = 8\ \mathrm{mV}$

COMPRENDRE
On retrouve cette valeur avec $u_C = -R\,i = 33 \times 2{,}4 \times 10^{-4}$ V.

À LA CALCULATRICE



3.6 Le condensateur est-il déchargé ? Justifier.

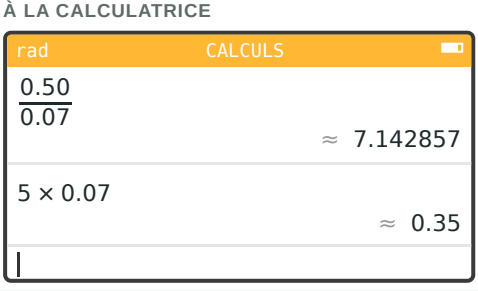
Données utiles $u_C(0{,}50) \approx 8$ mV (3.5) ; $\tau \approx 0{,}07$ s (2.6)

À $t = 0{,}50$ s, il s'est écoulé environ $7\,\tau$, soit plus de $5\,\tau = 0{,}35$ s. La tension $u_C \approx 8$ mV représente moins de 0,1 % de U_0.

On peut considérer que le condensateur est déchargé.

COMPRENDRE
En théorie, l'exponentielle ne s'annule jamais. En pratique, on considère la décharge terminée au bout de $5\,\tau$, quand il reste moins de 1 % de la tension initiale.

À LA CALCULATRICE



4.1 Rappeler l'expression de l'énergie emmagasinée dans le condensateur en fonction de C et u_C, puis en fonction de C et q_A.

$E = \frac{1}{2} C u_C^2$

Comme $u_C = \frac{q_A}{C}$ (1.2) : $E = \frac{1}{2} C \left(\frac{q_A}{C}\right)^2$.

$$E = \frac{1}{2} C u_C^2 = \frac{1}{2} \frac{q_A^2}{C}$$

4.2 Un condensateur de capacité $C' > C$ est chargé sous la même tension U_0. L'énergie emmagasinée est-elle supérieure à la précédente ?

Chargés sous la tension U_0, les condensateurs emmagasinent $E = \frac{1}{2} C U_0^2$ et $E' = \frac{1}{2} C' U_0^2$.

À tension égale, l'énergie est proportionnelle à la capacité : $\frac{E'}{E} = \frac{C'}{C} > 1$.

Oui : $E' > E$.

PIÈGE

Raisonner avec $E = \frac{q_A^2}{2C}$ et conclure que l'énergie diminue : la charge n'est pas la même, c'est la tension U_0 qui est imposée.