Analogies électromécaniques

Bac S 2006 Inde (Pondichéry) (ancien programme) · Exercice 2 **5 points** **Durée conseillée 1 h 05**

1.a Faire le bilan des forces agissant sur (S) et les représenter sur un schéma.

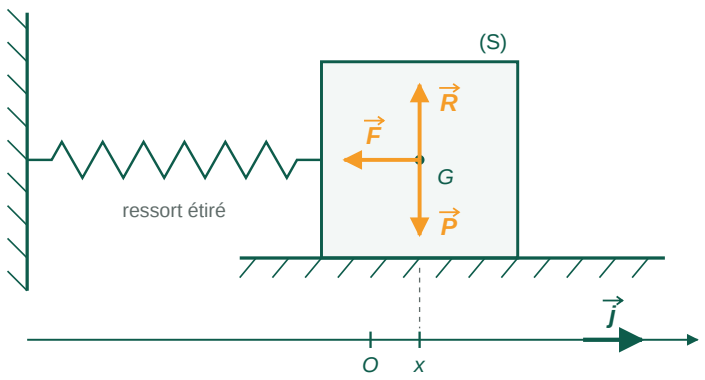
Système : le solide (S), étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Il est soumis à trois forces :

- son poids $\vec{P}$, vertical, dirigé vers le bas ;
- la réaction $\vec{R}$ du support, verticale et dirigée vers le haut, puisque le glissement se fait sans frottement ;
- la force de rappel du ressort $\vec{F} = -k\,x\,\vec{j}$, horizontale, dirigée vers O.

Trois forces : $\vec{P}$, $\vec{R}$ et $\vec{F} = -k\,x\,\vec{j}$, avec $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$.

PIÈGE
Dessiner $\vec{F}$ dans le sens du déplacement. La force de rappel ramène toujours G vers O : pour $x > 0$ (ressort étiré), elle est dirigée vers la gauche.

COMPRENDRE
L'oscillateur masse-ressort ne figure plus au programme actuel de spécialité. La démarche (bilan des forces, deuxième loi de Newton, projection) reste celle de tout exercice de mécanique.



1.a · Les trois forces appliquées à (S), représentées en G pour x > 0

1.b Retrouver l'équation différentielle du mouvement en précisant la loi physique utilisée.

Deuxième loi de Newton appliquée à (S), de masse m constante, dans le référentiel terrestre galiléen :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m\,\vec{a}$$

Projection sur l'axe $(O, \vec{j})$: le poids et la réaction sont verticaux, leur projection est nulle. Il reste $-k\,x = m\,a_x$ avec $a_x = \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$.

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + k\,x = 0 \text{ (deuxième loi de Newton)}$$

MÉTHODE
Écrire la loi sous forme vectorielle, puis projeter sur l'axe du mouvement. Les forces perpendiculaires à l'axe disparaissent de la projection : inutile de connaître leur valeur.

1.c Vérifier que $x = A\cos\left(2\pi\dfrac{t}{T}+\varphi\right)$ est solution si T a une expression à donner en fonction de k et m. Donner l'unité de $\dfrac{m}{k}$, le nom de T et sa valeur.

Données utiles $\dfrac{m}{k} = 1{,}0\times10^{-2}$ S.I.

On dérive deux fois :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\frac{2\pi}{T}\sin\left(2\pi\frac{t}{T}+\varphi\right) \text{ puis } \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 x$$

On reporte dans l'équation différentielle :

$$\left[k - m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\right]x(t) = 0$$

Cette égalité est vraie à tout instant, quels que soient A et φ, si le crochet est nul : $k = m\dfrac{4\pi^2}{T^2}$, soit $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$.

Unité : k est en $\mathrm{N\cdot m^{-1}}$ et $1\ \mathrm{N} = 1\ \mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-2}}$, donc k est en $\mathrm{kg\cdot s^{-2}}$ et $\dfrac{m}{k}$ en $\mathrm{s^2}$.

T est la période propre de l'oscillateur.

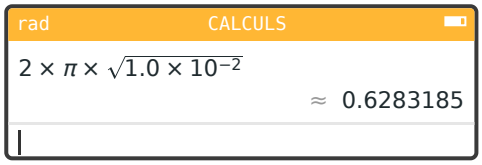
$$T = 2\pi\sqrt{1{,}0\times10^{-2}} = 0{,}63\ \mathrm{s}$$

$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} = 0{,}63$ s ; $\dfrac{m}{k}$ s'exprime en $\mathrm{s^2}$.

PIÈGE
Oublier le facteur $\dfrac{2\pi}{T}$ à chaque dérivation : il sort deux fois, d'où le carré. Sans lui, on ne trouve aucune condition sur T.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme la donnée $1{,}0\times10^{-2}$. L'unité $\mathrm{s^2}$ est cohérente : la racine de $\dfrac{m}{k}$ donne bien une durée.

À LA CALCULATRICE



1.d En prenant en compte les conditions initiales, montrer que $A = X_0$ et $\varphi = 0$.

Données utiles à $t = 0$: $x = X_0 = +4{,}0$ cm et $v_x = 0$

Vitesse : $v_x(t) = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\dfrac{2\pi}{T}\sin\left(2\pi\dfrac{t}{T}+\varphi\right)$.

À $t = 0$:

- $v_x(0) = -A\dfrac{2\pi}{T}\sin\varphi = 0$ avec $A \neq 0$, donc $\sin\varphi = 0$: $\varphi = 0$ ou $\varphi = \pi$;
- $x(0) = A\cos\varphi = X_0 > 0$.

L'amplitude A étant choisie positive, il faut $\cos\varphi > 0$: on retient $\varphi = 0$, d'où $A = X_0$.

$\varphi = 0$ et $A = X_0$: $x(t) = X_0\cos\left(2\pi\dfrac{t}{T}\right)$

COMPRENDRE
Le couple $\varphi = \pi$, $A = -X_0$ décrit exactement le même mouvement. Par convention l'amplitude est positive, ce qui fixe $\varphi = 0$.

MÉTHODE
Deux constantes inconnues (A et φ) demandent deux conditions initiales : une sur la position, une sur la vitesse. Commencer par celle qui est nulle.

2.a Quelle grandeur mécanique correspond à l'intensité $i(t)$? Quelles grandeurs électriques correspondent à la raideur du ressort et à la masse du solide ?

Les deux équations ont la même forme :

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+k\,x=0 \qquad L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}+\frac{1}{C}\,q=0$$

La charge q joue le rôle de l'abscisse x. Comme $i=\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$, l'intensité correspond à $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, c'est-à-dire à la vitesse v_x du solide.

Par identification des coefficients : la raideur k correspond à $\dfrac{1}{C}$, la masse m à l'inductance L.

$$i\leftrightarrow v_x\ ;\ k\leftrightarrow\frac{1}{C}\ ;\ m\leftrightarrow L$$

PIÈGE
Associer k à C. Dans l'équation électrique, q est divisée par C : c'est l'inverse de la capacité qui tient la place de la raideur.

COMPRENDRE
La bobine et le circuit LC ne sont plus au programme actuel de spécialité. Ici l'énoncé fournit l'équation : seule la comparaison terme à terme est demandée.

2.b Montrer que $q(t)=Q_0\cos\left(2\pi\dfrac{t}{T'}\right)$. Donner l'expression de T' en fonction des caractéristiques des composants, puis calculer sa valeur.

Données utiles $L=0{,}10$ H ; $C=10{,}0\ \mu$F ; $Q_0=10^{-4}$ C ; $x(t)=X_0\cos\left(2\pi\dfrac{t}{T}\right)$ (1.d)

Les équations différentielles ont la même forme et les conditions initiales se correspondent :

- $q(0)=Q_0$, comme $x(0)=X_0$;
- $i(0)=0$ (l'interrupteur vient d'être fermé, le courant est encore nul), comme $v_x(0)=0$.

La solution a donc la même forme que $x(t)$, en remplaçant X_0 par Q_0 et T par T'.

Pour la période, on remplace m par L et k par $\dfrac{1}{C}$ dans $T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$: $T'=2\pi\sqrt{LC}$.

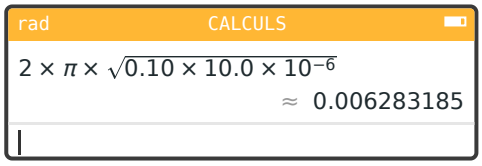
$$T'=2\pi\sqrt{0{,}10\times10{,}0\times10^{-6}}=6{,}3\times10^{-3}\ \text{s}$$

$$q(t)=Q_0\cos\left(2\pi\frac{t}{T'}\right)\ \text{avec}\ T'=2\pi\sqrt{LC}=6{,}3\ \text{ms}$$

PIÈGE
Laisser C en microfarads. Il faut $C=10{,}0\times10^{-6}$ F pour obtenir T' en secondes.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, imposés par $L=0{,}10$ H. La condition $i(0)=0$ est indispensable : sans elle, rien ne justifie une phase nulle.

À LA CALCULATRICE



3 Représenter sur deux schémas différents les fonctions $x(t)$ et $q(t)$, pour t variant de 0 à $2T$ (ou $2T'$), en précisant les points importants.

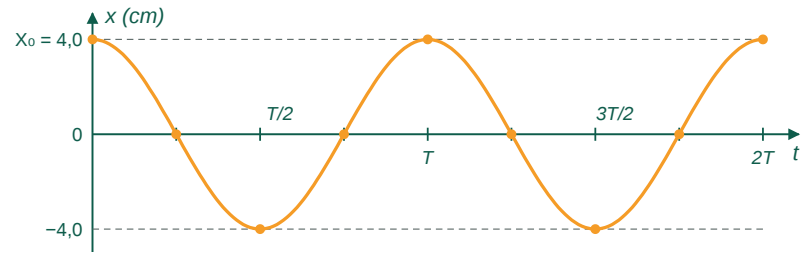
Données utiles $X_0=4{,}0$ cm ; $T=0{,}63$ s (1.c) ; $Q_0=10^{-4}$ C $=100\ \mu$C ; $T'=6{,}3$ ms (2.b)

Les deux fonctions sont des cosinus de phase nulle : elles ont la même allure.

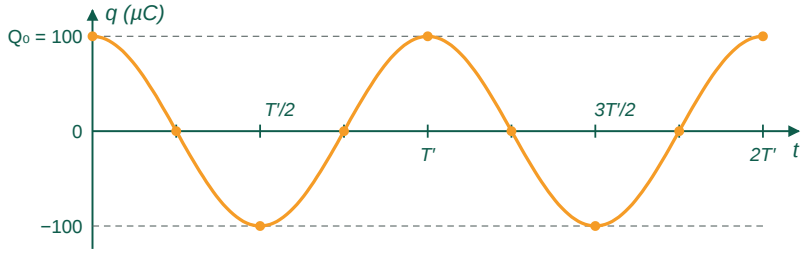
- À $t=0$: valeur maximale ($X_0=4{,}0$ cm ; $Q_0=100\ \mu$C), avec une tangente horizontale car $v_x(0)=0$ et $i(0)=0$.
- Maximum à chaque période : $t=0$, T, $2T$.
- Minimum ($-X_0$ ou $-Q_0$) aux demi-périodes : $t=\dfrac{T}{2}$ et $\dfrac{3T}{2}$.
- Passage par zéro en $t=\dfrac{T}{4}$, $\dfrac{3T}{4}$, $\dfrac{5T}{4}$ et $\dfrac{7T}{4}$.

Deux sinusoïdes de même allure : $x(t)$ d'amplitude $4{,}0$ cm et de période $0{,}63$ s ; $q(t)$ d'amplitude $100\ \mu$C et de période $6{,}3$ ms.

MÉTHODE
Placer d'abord les points remarquables tous les quarts de période (maximum, zéro, minimum, zéro), puis les relier par une courbe arrondie, sans pointe aux extrémums.



T = 0,63 s ; x s'annule en T/4, 3T/4, 5T/4 et 7T/4



T′ = 6,3 ms ; q s'annule en T′/4, 3T′/4, 5T′/4 et 7T′/4

3 · Allure de x(t) et de q(t) sur deux périodes

4 Les oscillateurs réels ne sont pas idéaux. Pourquoi ? Quels sont les phénomènes physiques responsables ?

Un oscillateur réel perd de l'énergie au cours du temps : l'amplitude de ses oscillations diminue, elles sont amorties.

- Oscillateur mécanique : les frottements (du solide sur le support, de l'air sur le solide) transforment peu à peu l'énergie mécanique en énergie thermique.
- Oscillateur électrique : la bobine et les fils ont une résistance non nulle ; l'énergie électrique du circuit est dissipée par effet Joule.

Causes : les frottements pour le système solide-ressort, la résistance du circuit (effet Joule) pour le circuit LC.

COMPRENDRE
L'analogie se prolonge : la résistance R du circuit joue le rôle du coefficient de frottement. Dans les deux cas, l'énergie de l'oscillateur est convertie en chaleur.