Evolution énergétique d'un circuit RLC série

Bac S 2006 Nouvelle-Calédonie (ancien programme) · Exercice 2 **4 points** **Durée conseillée 52 min**

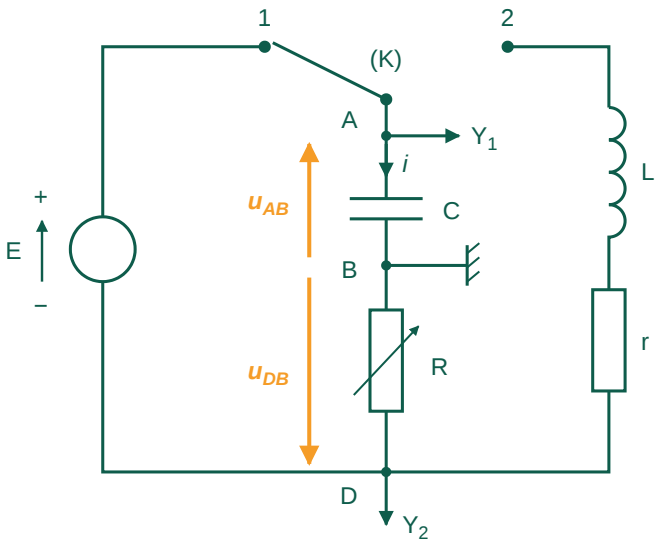
1.1 Représenter par des flèches, sur la figure 1 de l'annexe, la tension $u_{DB}(t)$ aux bornes de la résistance et la tension $u_{AB}(t)$ aux bornes du condensateur.

$u_{AB} = V_A - V_B$: la flèche est tracée le long du condensateur, sa pointe du côté de A.

$u_{DB} = V_D - V_B$: la flèche est tracée le long de la résistance, sa pointe du côté de D.

Flèche u_{AB} dirigée de B vers A ; flèche u_{DB} dirigée de B vers D.

MÉTHODE
La flèche de la tension u_{XY} pointe toujours vers X, la première lettre. La borne B est la masse de l'interface : la voie Y_1 mesure u_{AB} et la voie Y_2 mesure u_{DB}.



1.1 · Figure 1 complétée : chaque flèche pointe vers la première lettre de l'indice

1.2.1 Donner, en le justifiant, le signe de la charge q portée par l'armature A pendant la charge, et la relation entre q et u_{AB}.

En position 1, l'armature A est reliée à la borne positive du générateur. Le courant circule de cette borne vers A : des électrons quittent l'armature A, qui se charge positivement.

La flèche de u_{AB} pointe vers l'armature qui porte q, donc :

$q > 0$ et $q = C\,u_{AB}$

PIÈGE
Dire que « le courant apporte des charges positives sur A ». Dans les fils, seuls les électrons se déplacent, en sens inverse du courant : A perd des électrons.

1.2.2 En tenant compte de l'orientation du circuit, donner la relation entre l'intensité $i(t)$ et la charge $q(t)$.

Sur la figure 1, la flèche de i est orientée vers l'armature A, qui porte la charge q : l'intensité est le débit de charge qui arrive sur cette armature.

$$i(t) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

COMPRENDRE
Si la flèche de i s'éloignait de l'armature portant q, il faudrait écrire $i = -\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$. Ici, pendant la charge, q augmente et i est bien positive.

1.2.3 À partir des expressions des tensions aux bornes des trois dipôles, établir l'équation différentielle vérifiée par $u_{AB}(t)$.

Loi des mailles (commutateur en position 1) : $E = u_{AB} + u_{BD}$, soit $E = u_{AB} - u_{DB}$.

Le courant traverse la résistance de B vers D. Loi d'Ohm : $u_{BD} = R\,i$, donc $u_{DB} = -R\,i$.

Avec $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ et $q = C\,u_{AB}$ (C constante) : $i = C\,\dfrac{\mathrm{d}u_{AB}}{\mathrm{d}t}$, d'où $u_{DB} = -RC\,\dfrac{\mathrm{d}u_{AB}}{\mathrm{d}t}$.

En reportant dans la loi des mailles :

$$RC\,\frac{\mathrm{d}u_{AB}}{\mathrm{d}t} + u_{AB} = E$$

PIÈGE
Écrire $u_{DB} = +R\,i$. La flèche de u_{DB} est dans le même sens que celle de i : c'est u_{BD} qui vaut $R\,i$. Une erreur de signe ici fausse toute l'équation.

1.2.4 Vérifier que $u_{AB}(t) = E\left(1 - \mathrm{e}^{-t/(RC)}\right)$ est solution de cette équation différentielle.

On dérive $u_{AB}(t) = E - E\,\mathrm{e}^{-t/(RC)}$:

$$\frac{\mathrm{d}u_{AB}}{\mathrm{d}t} = \frac{E}{RC}\,\mathrm{e}^{-t/(RC)}$$

On calcule le premier membre de l'équation :

$$RC\,\frac{\mathrm{d}u_{AB}}{\mathrm{d}t} + u_{AB} = E\,\mathrm{e}^{-t/(RC)} + E - E\,\mathrm{e}^{-t/(RC)} = E$$

Le premier membre est égal à E à chaque instant : l'expression proposée est bien solution.

COMPRENDRE
À $t = 0$, l'expression donne $u_{AB} = 0$: c'est bien le condensateur déchargé de l'énoncé.

MÉTHODE
« Vérifier qu'une fonction est solution » : dériver, remplacer dans le premier membre, simplifier jusqu'à retrouver le second membre. On ne résout pas l'équation.

1.3.1 Donner, en fonction de $u_{AB}(t)$, l'expression littérale de l'énergie électrique E_e emmagasinée par le condensateur.

$$E_e = \frac{1}{2}\,C\,u_{AB}^2(t)$$

1.3.2 En déduire l'expression littérale de la valeur maximale $E_{e,\max}$ et calculer sa valeur.

Données utiles $E = 4{,}0$ V ; $C = 2{,}0\ \mu\mathrm{F} = 2{,}0 \times 10^{-6}$ F

Quand t devient grand, $\mathrm{e}^{-t/(RC)}$ tend vers 0 : u_{AB} tend vers sa valeur maximale E. Le condensateur est alors chargé et :

$$E_{e,\max} = \frac{1}{2}\,C\,E^2 = \frac{1}{2} \times 2{,}0 \times 10^{-6} \times 4{,}0^2$$

$E_{e,\max} = 1{,}6 \times 10^{-5}$ J, soit 16 μJ

PIÈGE
Laisser C en microfarads : le résultat ne sort en joules que si C est en farads et E en volts.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme E et C. Sans calculatrice : $\frac{1}{2} \times 2{,}0 = 1{,}0$ puis $4{,}0^2 = 16$, d'où 16×10^{-6} J.

2.1.1 Exprimer littéralement, en fonction de $i(t)$, l'énergie magnétique E_m emmagasinée dans la bobine.

$$E_m = \frac{1}{2}\,L\,i^2(t)$$

COMPRENDRE
La bobine, le circuit RLC et les oscillations électriques ne figurent plus au programme actuel de spécialité. La partie 1 (charge du condensateur, circuit RC) reste, elle, au programme.

2.1.2 À partir de l'une des tensions enregistrées, donner l'expression de l'intensité $i(t)$, puis celle de l'énergie magnétique emmagasinée dans la bobine en fonction de cette tension.

La tension aux bornes de la résistance est proportionnelle à l'intensité. L'orientation du circuit n'a pas changé, donc $u_{DB} = -R\,i$ (question 1.2.3) :

$$i(t) = -\frac{u_{DB}(t)}{R}$$

On remplace dans $E_m = \frac{1}{2} L\, i^2$:

$$i(t) = -\frac{u_{DB}(t)}{R} \text{ et } E_m = \frac{L\, u_{DB}^2(t)}{2R^2}$$

COMPRENDRE
La voie Y_2 sert de capteur de courant : à R connue, elle donne i au signe près. Le signe disparaît dans E_m puisque i est au carré.

2.1.3 En déduire l'expression de l'énergie totale E_T du circuit en fonction des tensions $u_{AB}(t)$ et $u_{DB}(t)$.

L'énergie totale est la somme des énergies du condensateur et de la bobine : $E_T = E_e + E_m$.

$$E_T = \frac{1}{2} C\, u_{AB}^2(t) + \frac{L\, u_{DB}^2(t)}{2R^2}$$

2.2 Identifier chacune des trois courbes de la figure 2 en justifiant. Quel phénomène explique la décroissance de la courbe 1 ?

À $t = 0$, le condensateur est chargé (E_e maximale) et aucun courant ne circule ($i = 0$, donc $E_m = 0$) : $E_T(0) = E_e(0)$.

- Courbe 2 : nulle à $t = 0$, elle représente E_m.
- Courbe 3 : maximale à $t = 0$, elle oscille en s'annulant quand la courbe 2 est maximale ; elle représente E_e.
- Courbe 1 : toujours au-dessus des deux autres, elle n'oscille pas ; elle représente leur somme E_T.

L'énergie totale diminue car les résistances du circuit (R et r) dissipent de l'énergie par effet Joule, sous forme de transfert thermique.

Courbe 1 : E_T ; courbe 2 : E_m ; courbe 3 : E_e. La décroissance de E_T est due à l'effet Joule.

MÉTHODE
Pour identifier des courbes d'énergie, regarder l'instant initial : la grandeur nulle à $t = 0$ (ici i) désigne l'énergie nulle, et la courbe qui enveloppe les deux autres est toujours la somme.

3.1 Tracer sur la figure 3 de l'annexe les deux courbes manquantes et préciser ce que chacune des trois courbes représente.

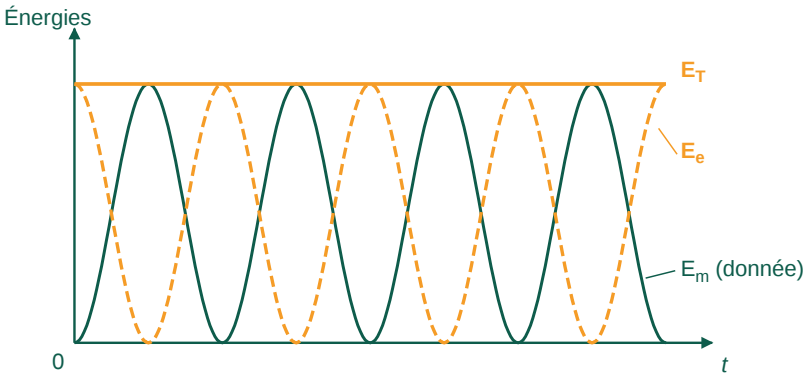
La courbe déjà tracée est nulle à $t = 0$: c'est l'énergie magnétique E_m .

Les oscillations étant entretenues, l'énergie totale est constante : E_T est une droite horizontale, à la hauteur des maxima de E_m.

À chaque instant $E_e = E_T - E_m$: E_e part de sa valeur maximale, s'annule quand E_m est maximale et redevient maximale quand E_m s'annule.

Courbe donnée : E_m ; droite horizontale : E_T ; courbe en opposition avec E_m, de même amplitude : E_e.

PIÈGE
Tracer E_e avec une amplitude différente de celle de E_m, ou des croisements à une hauteur quelconque. Les deux courbes se coupent à mi-hauteur, là où $E_e = E_m = \frac{E_T}{2}$.



3.1 · Figure 3 complétée : en orange, les deux courbes tracées par l'élève

3.2 Pourquoi un tel régime est-il qualifié d'entretenu ?

Le dispositif ajouté fournit en permanence au circuit une énergie égale à celle que les résistances dissipent par effet Joule. L'énergie totale reste donc constante et l'amplitude des oscillations ne diminue plus.

Les pertes par effet Joule sont exactement compensées : les oscillations gardent une amplitude constante.