Un séisme dans le Jura

Bac S 2006 Nouvelle-Calédonie (ancien programme) · Exercice 1 **5,5 points** **Durée conseillée 1 h 05**

1.1 Associer à chaque signal du document 1 le type d'ondes détectées (P ou S). Justifier.

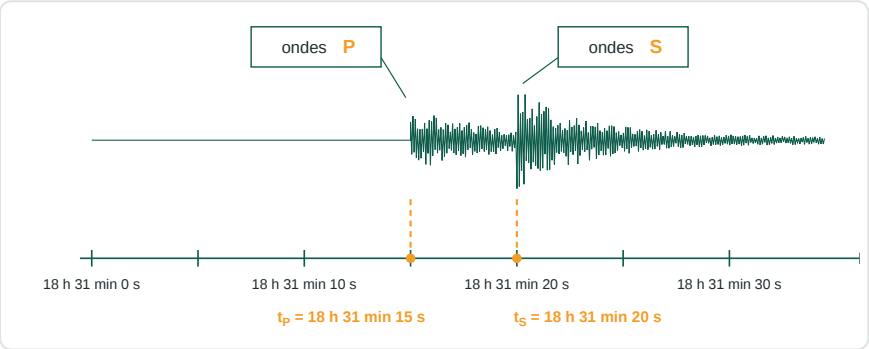
Données utiles $v_P = 6{,}0\ \text{km}\cdot\text{s}^{-1}$; $v_S = 3{,}5\ \text{km}\cdot\text{s}^{-1}$

Les ondes P et S partent du même lieu à la même date t_0 et parcourent la même distance d jusqu'à la station.

Comme $v_P > v_S$, les ondes P mettent moins de temps : elles arrivent les premières.

Premier signal (à gauche) : ondes **P** ; second signal, plus tardif : ondes **S**.

COMPRENDRE
Les noms le rappellent : P pour « primaires » (premières arrivées), S pour « secondaires ». La justification attendue reste la comparaison des célérités, à distance parcourue égale.



1.1 · Document 1 complété (en orange : ce que l'élève écrit et relève)

1.2 Relever sur le document 1 les dates d'arrivée t_S et t_P des ondes S et P à la station.

L'axe des dates porte une graduation toutes les 5 s. Le premier signal démarre sur la graduation située entre 10 s et 20 s, le second sur la graduation 20 s.

$t_P = 18\ \text{h}\ 31\ \text{min}\ 15\ \text{s}$ et $t_S = 18\ \text{h}\ 31\ \text{min}\ 20\ \text{s}$

PIÈGE
Seule une graduation sur deux est chiffrée : l'intervalle entre deux traits vaut 5 s, et non 10 s.

1.3 Exprimer la célérité v_S des ondes S en fonction de d, t_S et t_0, puis la célérité v_P des ondes P en fonction de d, t_P et t_0.

Chaque onde parcourt la distance d entre la date d'émission t_0 et sa date d'arrivée :

$$v_S = \frac{d}{t_S - t_0} \text{ et } v_P = \frac{d}{t_P - t_0}$$

PIÈGE
La durée du trajet est une différence de dates : écrire $v_S = d/t_S$ est faux, car t_0 n'est pas l'origine des dates.

1.4 Retrouver l'expression $d = \dfrac{v_S\, v_P}{v_P - v_S}(t_S - t_P)$.

D'après 1.3, les durées de parcours sont $t_S - t_0 = \dfrac{d}{v_S}$ et $t_P - t_0 = \dfrac{d}{v_P}$.

En soustrayant membre à membre, la date inconnue t_0 disparaît :

$$t_S - t_P = \frac{d}{v_S} - \frac{d}{v_P} = d\,\frac{v_P - v_S}{v_S\, v_P}$$

$d = \dfrac{v_S\, v_P}{v_P - v_S}(t_S - t_P)$, qui est bien l'expression attendue.

MÉTHODE
Deux relations, deux inconnues (d et t_0) : on élimine celle que l'on ne veut pas. Soustraire deux durées qui ont la même date de départ fait disparaître cette date.

1.5 En déduire la valeur numérique de la distance d.

Données utiles $v_P = 6{,}0\ \text{km}\cdot\text{s}^{-1}$; $v_S = 3{,}5\ \text{km}\cdot\text{s}^{-1}$; $t_S - t_P = 5\ \text{s}$ (1.2)

Avec les célérités en $\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$ et les dates en s, d s'obtient en km :

$$d = \frac{3{,}5 \times 6{,}0}{6{,}0 - 3{,}5} \times 5 = \frac{21}{2{,}5} \times 5 = 21 \times 2 = 42\ \text{km}$$

$d = 42\ \text{km}$, soit $4{,}2 \times 10^4\ \text{m}$

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme les célérités. L'écart de 5 s est lu sur un axe gradué de 5 s en 5 s : la valeur de d reste donc une estimation.

MÉTHODE
Sans calculatrice, simplifier avant de multiplier : $5 \div 2{,}5 = 2$, il reste 21×2.

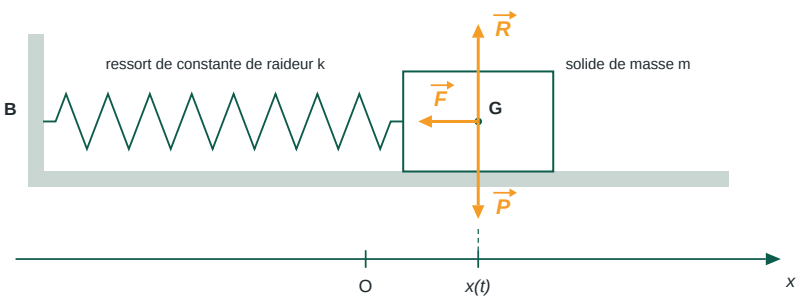
2.1.1 Faire l'inventaire des forces extérieures exercées sur le solide et les représenter sur le document 2.

Système : {solide}, dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Sans frottement, il est soumis à trois forces :

- son poids $\vec{P}$, vertical, vers le bas, appliqué en G ;
- la réaction $\vec{R}$ du support, perpendiculaire au support (verticale, vers le haut) ;
- la force de rappel du ressort $\vec{F} = -k\,x\,\vec{i}$, horizontale, où $\vec{i}$ est le vecteur unitaire de l'axe Ox.

Trois forces : $\vec{P}$, $\vec{R}$ et $\vec{F} = -k\,x\,\vec{i}$, avec $\vec{P}$ et $\vec{R}$ de même longueur sur le schéma.

PIÈGE
Sur le document, $x(t) > 0$: le ressort est étiré et tire le solide vers O. La flèche de $\vec{F}$ pointe donc vers la gauche, à l'opposé du déplacement.



2.1.1 · Document 2 complété (en orange : les forces, ici pour $x > 0$, ressort étiré)

2.1.2 Appliquer la deuxième loi de Newton au centre d'inertie G du solide pour établir l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$.

Dans le référentiel terrestre galiléen, pour le solide de masse m constante :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m\,\vec{a}_G$$

Projection sur l'axe Ox : $\vec{P}$ et $\vec{R}$ sont perpendiculaires à l'axe, leur projection est nulle. Il reste :

$$-k\,x = m\,\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}\,x = 0$$

PIÈGE
Oublier le signe « $-$ » de la force de rappel donne $\ddot{x} = +\frac{k}{m}\,x$, dont les solutions ne sont pas des oscillations.

COMPRENDRE
L'oscillateur solide-ressort n'est plus au programme de la spécialité actuelle. La démarche, elle, reste exigible : système, référentiel, bilan des forces, deuxième loi de Newton, projection sur un axe.

2.1.3 Vérifier par une analyse dimensionnelle la cohérence de l'expression $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

2π est sans dimension et $[m] = \mathrm{M}$.

La force de rappel a pour valeur $F = k\,|x|$, donc $[k] = \frac{[F]}{\mathrm{L}}$. Or une force est le produit d'une masse par une accélération : $[F] = \mathrm{M}\cdot\mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-2}$. Ainsi

$$[k] = \frac{\mathrm{M}\cdot\mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-2}}{\mathrm{L}} = \mathrm{M}\cdot\mathrm{T}^{-2}$$

$$\left[\sqrt{\frac{m}{k}}\right] = \left(\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{M}\cdot\mathrm{T}^{-2}}\right)^{1/2} = \left(\mathrm{T}^2\right)^{1/2} = \mathrm{T}$$

$2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ a la dimension d'un temps : l'expression de T_0 est homogène à une durée.

COMPRENDRE
Avec les unités, le même raisonnement donne k en $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-2}$. L'analyse dimensionnelle valide la forme de l'expression, pas le facteur 2π.

MÉTHODE
Pour la dimension d'une constante, partir d'une relation connue où elle figure (ici $F = k\,x$), puis ramener la force à $\mathrm{M}\cdot\mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-2}$ grâce à $F = m\,a$.

2.2.1 Lors d'un séisme, quel est l'excitateur ? Quel est le résonateur ?

Le sol, et le bâti qui lui est fixé, vibrent et imposent leur fréquence : ils constituent l'excitateur.

Le système solide-ressort est mis en oscillation à cette fréquence : c'est le résonateur.

Excitateur : le sol (avec le bâti) ; résonateur : le système solide-ressort.

COMPRENDRE
L'excitateur impose sa période ; le résonateur possède une période propre T_0 et répond avec une amplitude qui dépend de l'écart entre les deux.

2.2.2 L'amortissement étant suffisamment faible, pour quelle période de l'excitateur la résonance se produit-elle ?

Pour un amortissement faible, l'amplitude des oscillations du résonateur est maximale quand la période de l'excitateur est égale à la période propre du résonateur.

Résonance pour $T = T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

COMPRENDRE
Si l'amortissement est plus fort, la résonance devient floue : l'amplitude maximale diminue et la période de résonance s'écarte de T_0.

2.2.3 À l'aide du document 1, dire si l'ordre de grandeur de la période des ondes P et S est plutôt 10 s, 1 s ou 0,1 s. Justifier.

Sur le document 1, deux graduations voisines sont séparées de 5 s. Dans cet intervalle, le tracé effectue plusieurs dizaines d'allers-retours, si serrés qu'ils se distinguent à peine : une durée de 1 s contient donc plusieurs oscillations.

La période est nettement inférieure à 1 s, ce qui exclut 1 s et 10 s.

Ordre de grandeur de la période des ondes P et S : $0{,}1$ s

MÉTHODE
Pour estimer une période sur un tracé serré, compter les oscillations sur une durée connue puis diviser : quelques dizaines d'oscillations en 5 s donnent une période de l'ordre du dixième de seconde.

2.2.4 Calculer la valeur approchée de la masse m du solide qui a permis de relever le sismogramme des ondes P et S.

Données utiles $k = 100\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}$; $T_0 = 0{,}1\ \text{s}$ (2.2.2 et 2.2.3) ; aide au calcul : $\pi^2 = 10$

Le sismomètre enregistre ces ondes s'il entre en résonance, donc si sa période propre est égale à leur période : $T_0 \approx 0{,}1\ \text{s}$.

$T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ donne $T_0^2 = 4\pi^2\,\dfrac{m}{k}$, soit $m = \dfrac{k\,T_0^2}{4\pi^2}$.

$$m = \frac{100 \times (0{,}1)^2}{4 \times 10} = \frac{1}{40} = 2{,}5 \times 10^{-2}\ \text{kg}$$

$m \approx 2{,}5 \times 10^{-2}$ kg, soit environ 25 g

PIÈGE
Oublier d'élever T_0 au carré, ou garder 2π au lieu de $4\pi^2$ au dénominateur : élever toute la relation au carré avant d'isoler m.

COMPRENDRE
T_0 n'est qu'un ordre de grandeur : la masse trouvée l'est aussi, quelques dizaines de grammes.

2.2.5 Certaines ondes ont des fréquences beaucoup plus basses que celles des ondes P et S. Comment faudrait-il modifier la masse m pour pouvoir les enregistrer ?

Comme $T = \dfrac{1}{f}$, une fréquence beaucoup plus basse correspond à une période beaucoup plus grande.

Pour qu'il y ait résonance, la période propre $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ doit devenir aussi grande que cette période. À raideur k fixée, T_0 augmente avec m.

Il faut augmenter la masse m du solide.

COMPRENDRE
m varie comme T_0^2 : pour une période 10 fois plus grande, il faut une masse 100 fois plus grande. Voilà pourquoi il existe plusieurs classes de sismomètres.

3 Répondre, en justifiant brièvement, aux cinq questions du document 3 : direction privilégiée, transport de matière, définition d'une onde longitudinale, longueur d'onde d'une onde P de période $T = 0{,}2\ \text{s}$, célérités moyennes.

Données utiles $v_P = 6{,}0\ \text{km}\cdot\text{s}^{-1}$; $T = 0{,}2\ \text{s}$

Direction privilégiée ? Non. Les ondes sismiques se propagent à partir de l'épicentre dans toutes les directions qui leur sont offertes : le séisme a d'ailleurs été ressenti en France, en Suisse et en Allemagne.

Transport de matière ? Non. Une onde mécanique progressive est la propagation d'une perturbation sans transport de matière ; elle transporte de l'énergie. Après son passage, le sol retrouve sa position.

Onde longitudinale. C'est une onde pour laquelle la perturbation a la même direction que la propagation de l'onde. Pour les ondes P, le sol est comprimé puis dilaté le long de la direction de propagation.

Longueur d'onde. C'est la distance parcourue par l'onde pendant une période :

$$\lambda = v_P\,T = 6{,}0 \times 10^3 \times 0{,}2 = 1{,}2 \times 10^3\ \text{m}$$

Valeurs moyennes. La célérité d'une onde dépend du milieu de propagation. Entre le foyer et la station, les ondes traversent des structures géologiques différentes, dans lesquelles leur célérité change : on ne peut donner qu'une valeur moyenne sur le trajet.

$\lambda = v_P\,T = 1{,}2 \times 10^3$ m, soit 1,2 km

PIÈGE
Pour λ, convertir la célérité : $6{,}0\ \text{km}\cdot\text{s}^{-1} = 6{,}0 \times 10^3\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Sinon, annoncer clairement un résultat en kilomètres.

COMPRENDRE
Dans une onde transversale (ondes S), la perturbation est perpendiculaire à la direction de propagation. Le texte encadré contient la réponse à la dernière question : célérité « modifiée par les structures géologiques traversées ».