Le piège photo

Bac S 2006 Amérique du Nord (ancien programme) · Exercice 2 **5 points** **Durée conseillée 1 h 05**

1 (Partie I) Schématiser le circuit de charge avec le sens réel du courant, établir l'équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$, vérifier sa forme $u_C + \tau \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = E$ et en déduire τ.

Le courant sort de la borne $+$ du générateur : il arrive sur l'armature supérieure du condensateur, qui porte la charge q (schéma).

Loi des mailles : $u_C + u_R = E$.

Loi d'Ohm : $u_R = R\,i$. Pour le condensateur : $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ et $q = C\,u_C$, donc $i = C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$.

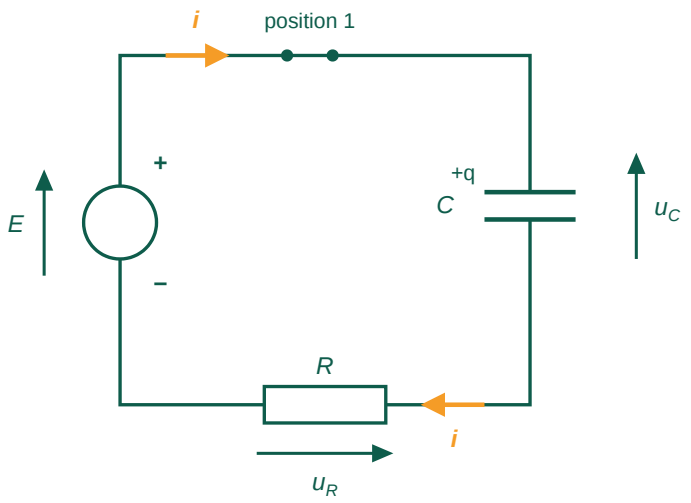
On obtient :

$$u_C + RC\,\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = E$$

C'est la forme demandée, avec, par identification :

$\tau = RC$

PIÈGE
Les flèches des tensions u_R et u_C pointent vers le point par où le courant entre dans le dipôle (convention récepteur). Sans cela, un signe « $-$ » apparaît dans l'équation.



1 · Circuit de charge (commutateur en position 1) ; en orange, le sens réel du courant

2 (Partie I) Montrer par une analyse dimensionnelle que la constante τ est homogène à un temps.

De $u_R = R\,i$: $[R] = \dfrac{[U]}{[I]}$.

De $i = C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$: $[I] = [C]\,\dfrac{[U]}{[T]}$, soit $[C] = \dfrac{[I]\,[T]}{[U]}$.

Donc $[\tau] = [R]\,[C] = \dfrac{[U]}{[I]} \times \dfrac{[I]\,[T]}{[U]}$.

$[\tau] = [T]$: τ est homogène à un temps.

MÉTHODE
Pour trouver la dimension d'une grandeur, partir d'une relation connue qui la contient et l'isoler. Une dérivée par rapport au temps a la dimension de la grandeur divisée par un temps.

3 (Partie I) Déduire de l'équation différentielle la valeur U_C de $u_C(t)$ en régime permanent.

Données utiles $E = 8{,}0$ V

En régime permanent, u_C ne varie plus : $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = 0$.

L'équation différentielle se réduit à $U_C + \tau \times 0 = E$.

$U_C = E = 8{,}0$ V

4 (Partie I) Montrer que $u_C(t) = A\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$ est solution de l'équation différentielle à condition que $A = E$.

On dérive : $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \dfrac{A}{\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$.

On reporte dans le membre de gauche de l'équation :

$$u_C + \tau\,\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = A - A\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \tau \times \frac{A}{\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau} = A$$

Ce membre vaut E à tout instant si, et seulement si :

$A = E$: $u_C(t) = E\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$ est solution.

PIÈGE

La dérivée de $\mathrm{e}^{-t/\tau}$ est $-\dfrac{1}{\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$: avec le signe « $-$ » placé devant l'exponentielle, la dérivée de u_C est positive.

5 (Partie I) Montrer que, pour une durée égale à 5τ, on peut considérer que la charge du condensateur est totale.

À $t = 5\tau$: $u_C(5\tau) = E\left(1 - \mathrm{e}^{-5}\right) = 0{,}993\,E$.

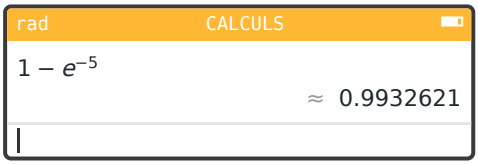
L'écart avec la valeur finale E est inférieur à $1\ \%$.

$u_C(5\tau) \approx 0{,}99\,E \approx E$: la charge est pratiquement totale.

COMPRENDRE

En toute rigueur, u_C n'atteint jamais E : l'exponentielle ne s'annule pas. « Charge totale » est une convention : à 5τ, il manque moins de $1\ \%$.

À LA CALCULATRICE



6 (Partie I) Évaluer τ sur le graphique 1 en expliquant la méthode, puis en déduire la durée minimale pendant laquelle le commutateur doit rester en position 1.

Données utiles $E = 8{,}0$ V ; charge totale au bout de 5τ (Q5)

À $t = \tau$: $u_C(\tau) = E\left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right) = 0{,}63\,E = 0{,}63 \times 8{,}0 = 5{,}0$ V.

On trace l'horizontale $u_C = 5{,}0$ V : elle coupe la courbe au point d'abscisse $\tau = 0{,}22$ s.

Durée minimale de charge : $\Delta t = 5\tau = 5 \times 0{,}22 = 1{,}1$ s.

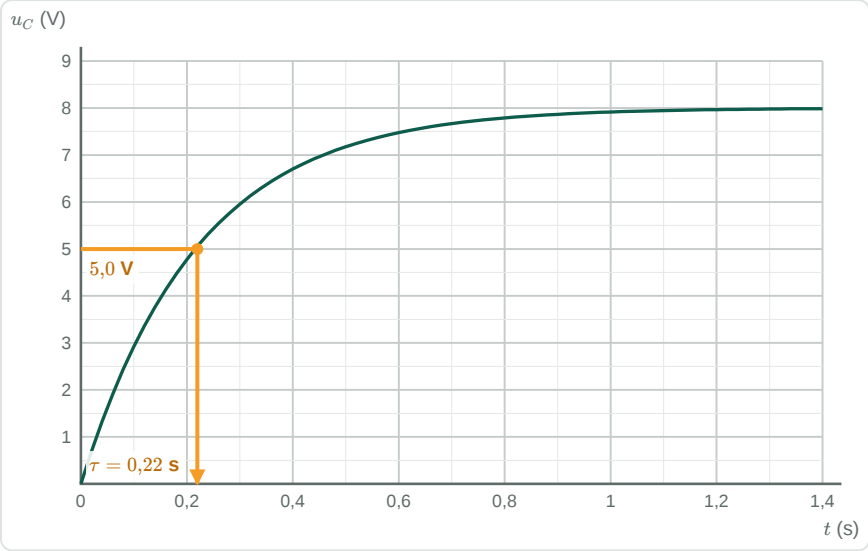
$\tau = 0{,}22$ s ; $\Delta t = 5\tau = 1{,}1$ s

COMPRENDRE

Deux chiffres significatifs, comme $E = 8{,}0$ V et comme le permet la lecture graphique. Une valeur entre $0{,}21$ et $0{,}23$ s est acceptable.

MÉTHODE

La lecture à $63\ \%$ de la valeur finale est plus précise que la tangente à l'origine, dont le tracé à la main est incertain.



À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$1 - e^{-1}$ ≈ 0.6321206

0.63 × 8.0 ≈ 5.04

5 × 0.22 ≈ 1.1

6 · Graphique 1 complété : lecture de τ à 63 % de E

1 (Partie II) Déterminer, à l'aide du graphique 2, la durée $t_{1/2}$ au bout de laquelle la tension aux bornes du condensateur est réduite de moitié.

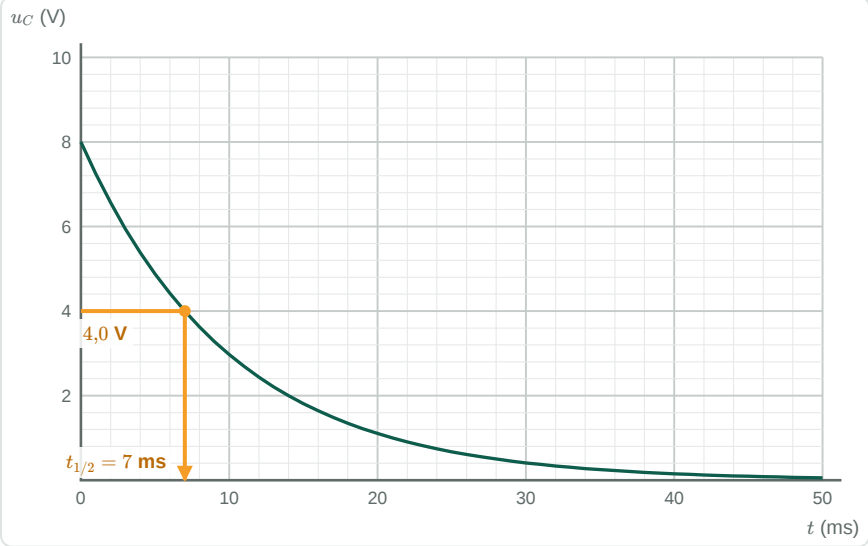
À $t = 0$, $u_C = 8{,}0$ V. On cherche l'instant où $u_C = \dfrac{8{,}0}{2} = 4{,}0$ V.

L'horizontale $u_C = 4{,}0$ V coupe la courbe au point d'abscisse $0{,}007$ s.

$t_{1/2} \approx 7$ ms

COMPRENDRE

La bobine et la décharge d'un condensateur dans une bobine ne sont plus au programme de spécialité. Cette question reste une simple lecture graphique. Le piège réagit en quelques millièmes de seconde.



1 · Graphique 2 complété : lecture de $t_{1/2}$

2 (Partie II) Parmi E, C et R, indiquer en justifiant les paramètres sur lesquels agir pour que l'énergie initialement emmagasinée par le condensateur soit la plus grande possible.

Le condensateur chargé sous la tension $U_C = E$ (Q3) emmagasine l'énergie

$$W = \frac{1}{2} C E^2$$

Cette énergie augmente si l'on augmente E ou si l'on augmente C. Elle ne dépend pas de R : la résistance modifie seulement la durée de la charge ($\tau = RC$).

On peut agir sur E et sur C (en les augmentant), pas sur R.

COMPRENDRE
Doubler E multiplie l'énergie par 4, doubler C par 2 seulement. De plus, augmenter C allonge la charge et ralentit la décharge : agir sur E est le choix le plus efficace.

1 (Partie III) Nommer le régime correspondant à l'évolution de la tension $u_C(t)$ du graphique 3.

La tension oscille de part et d'autre de zéro avec une amplitude qui décroît au cours du temps.

Régime pseudo-périodique (oscillations amorties).

COMPRENDRE
Les oscillations électriques d'un circuit RLC ne figurent plus au programme de spécialité. L'amortissement vient de la résistance $R' + r$, qui dissipe l'énergie par effet Joule.

2 (Partie III) Utiliser l'enregistrement du graphique 3 pour déterminer l'inductance L de la bobine, en justifiant la démarche.

Données utiles $C' = 10$ nF $= 10 \times 10^{-9}$ F

L'amortissement étant faible, la pseudo-période T est pratiquement égale à la période propre du circuit : $T \approx T_0 = 2\pi\sqrt{L\,C'}$.

Sur le graphique 3, quatre pseudo-périodes durent $8{,}0 \times 10^{-5}$ s : $T = \dfrac{8{,}0 \times 10^{-5}}{4} = 2{,}0 \times 10^{-5}$ s.

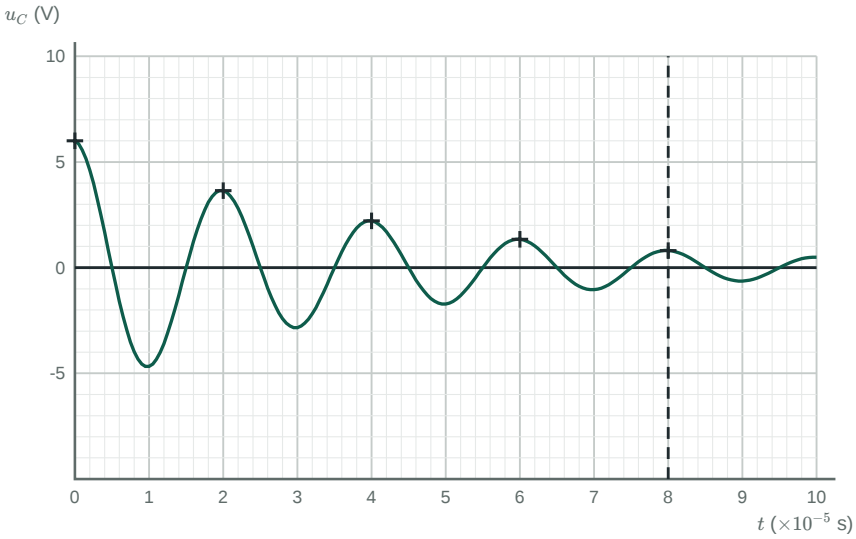
De $T^2 = 4\pi^2\,L\,C'$:

$$L = \frac{T^2}{4\pi^2\,C'} = \frac{\left(2{,}0 \times 10^{-5}\right)^2}{4\pi^2 \times 10 \times 10^{-9}} = 1{,}0 \times 10^{-3}\ \text{H}$$

$$\boxed{L = 1{,}0 \times 10^{-3}\ \text{H} = 1{,}0\ \text{mH}}$$

PIÈGE
Oublier d'élever T au carré ou laisser C' en nF. Avec C' en farads et T en secondes, L sort en henrys.

MÉTHODE
Mesurer plusieurs pseudo-périodes puis diviser : l'incertitude de lecture est répartie sur quatre oscillations.



2 · Graphique 3 : les croix repèrent cinq maximums successifs, soit $4T = 8{,}0 \times 10^{-5}$ s

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$$\frac{8.0 \times 10^{-5}}{4} \approx 2 \times 10^{-5}$$

$$\frac{(2.0 \times 10^{-5})^2}{4 \times \pi^2 \times 10 \times 10^{-9}} \approx 0.001013212$$