Galiléo

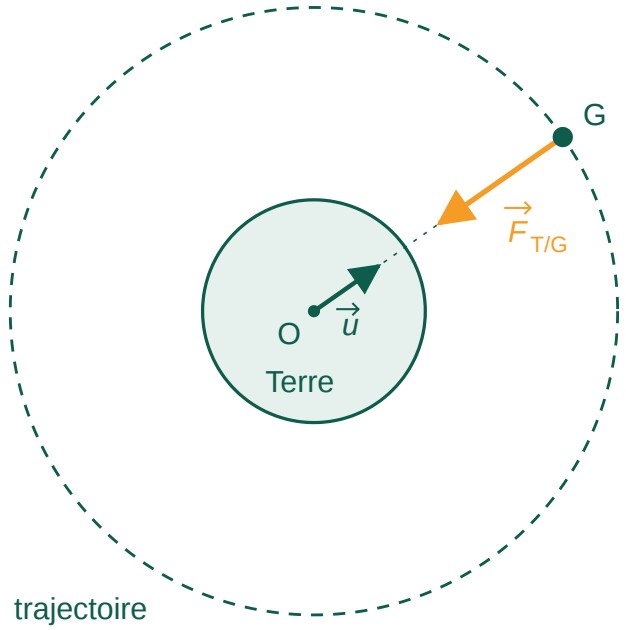
Bac S 2007 Polynésie (ancien programme) · Exercice 4 **5 points** **Durée conseillée 1 h 05**

1.1.1 (I-1-a) Faire un schéma, sans souci d'échelle, représentant la Terre, le satellite sur sa trajectoire et la force exercée par la Terre sur le satellite.

La trajectoire est un cercle de centre O. La force $\vec{F}_{T/G}$ est appliquée au point G, dirigée selon la droite (GO) et orientée de G vers O.

Schéma ci-dessous : $\vec{F}_{T/G}$ part de G et pointe vers le centre O de la Terre.

PIÈGE
Faire partir la flèche du centre de la Terre, ou la tracer tangente à la trajectoire. La force s'applique au satellite et elle est portée par le rayon.



1.1.1 · La Terre, le satellite G sur son orbite circulaire et la force exercée par la Terre

1.1.2 (I-1-b) Donner l'expression vectorielle de cette force, $\vec{u}$ étant le vecteur unitaire dirigé de O vers G.

La distance entre le centre de la Terre et le satellite est $OG = R_T + h$.

$$\vec{F}_{T/G} = -G\frac{M_T\, m_{sat}}{(R_T+h)^2}\,\vec{u}$$

PIÈGE
Écrire h^2 au dénominateur : la distance à prendre est celle qui sépare les centres, soit $R_T + h$.

COMPRENDRE
Le signe « $-$ » traduit l'attraction : la force est de sens opposé à $\vec{u}$, qui va de O vers G.

1.2.1 (I-2-a) Dans quel référentiel le mouvement du satellite est-il décrit ?

Le satellite tourne autour du centre O de la Terre.

Le mouvement est décrit dans le référentiel **géocentrique**.

PIÈGE
Répondre « référentiel terrestre » : celui-ci tourne avec la Terre, alors que le géocentrique a ses axes dirigés vers des étoiles lointaines.

1.2.2 (I-2-b) Quelle hypothèse faut-il faire sur ce référentiel pour appliquer la seconde loi de Newton ?

La seconde loi de Newton n'est valable que dans un référentiel galiléen.

Il faut supposer le référentiel géocentrique **galiléen**.

COMPRENDRE
L'hypothèse est raisonnable ici : la durée d'une révolution (quelques heures) est courte devant l'année que met la Terre pour tourner autour du Soleil.

1.2.3 (I-2-c) En appliquant la seconde loi de Newton au satellite, déterminer l'expression du vecteur accélération $\vec{a}$ du point G.

Système : {satellite}, de masse m_{sat} constante ; référentiel géocentrique supposé galiléen ; seule force : $\vec{F}_{T/G}$.

Seconde loi de Newton : $\vec{F}_{T/G} = m_{sat}\,\vec{a}$, soit $-G\,\dfrac{M_T\,m_{sat}}{(R_T+h)^2}\,\vec{u} = m_{sat}\,\vec{a}$.

$$\vec{a} = -G\,\frac{M_T}{(R_T+h)^2}\,\vec{u}$$

COMPRENDRE
La masse du satellite se simplifie : l'accélération, donc le mouvement, ne dépend pas de m_{sat}. La valeur 700 kg ne sert à aucun calcul de l'exercice.

MÉTHODE
Toujours annoncer le système, le référentiel et le bilan des forces avant d'écrire la loi : ces trois lignes sont notées.

1.3.1 (I-3-a) Donner les caractéristiques du vecteur accélération d'un point matériel ayant un mouvement circulaire uniforme.

Pour un mouvement circulaire uniforme de rayon R et de vitesse v, le vecteur accélération a pour :

- direction : le rayon du cercle passant par le point mobile ;
- sens : vers le centre du cercle (accélération centripète) ;
- valeur : $a = \dfrac{v^2}{R}$, constante.

$\vec{a}$ est radial, centripète, de valeur $a = \dfrac{v^2}{R}$.

PIÈGE
Dire que l'accélération est nulle parce que la vitesse a une valeur constante. Le vecteur vitesse change de direction à chaque instant : il y a donc une accélération.

1.3.2 (I-3-b) Montrer que la vitesse du satellite vérifie $v^2 = G\,\dfrac{M_T}{R}$ avec $R = R_T + h$.

D'après I-2-c, avec $R = R_T + h$, la valeur de l'accélération est $a = G\,\dfrac{M_T}{R^2}$.

Le mouvement est circulaire uniforme, donc d'après I-3-a : $a = \dfrac{v^2}{R}$.

En égalant les deux expressions : $\dfrac{v^2}{R} = G\,\dfrac{M_T}{R^2}$.

$v^2 = G\,\dfrac{M_T}{R}$ avec $R = R_T + h$: c'est la relation attendue.

COMPRENDRE
Les deux vecteurs sont bien de même direction et de même sens (vers O), ce qui autorise à égaler leurs valeurs.

1.4.1 (I-4-a) Définir la période de révolution T du satellite et donner son expression en fonction de G, M_T et R.

La période de révolution T est la durée mise par le satellite pour effectuer un tour complet de sa trajectoire.

À vitesse constante, il parcourt la circonférence $2\pi R$ pendant T :

$$T = \frac{2\pi R}{v}.$$

Avec $v = \sqrt{\dfrac{G\,M_T}{R}}$: $\quad T = 2\pi R\sqrt{\dfrac{R}{G\,M_T}}$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{G\,M_T}}}$$

MÉTHODE
Pour faire entrer R sous la racine, l'écrire $\sqrt{R^2}$: $R\sqrt{R} = \sqrt{R^3}$. Contrôler ensuite l'homogénéité : le résultat doit être en secondes.

1.4.2 (I-4-b) Calculer la période T.

Données utiles $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$; $M_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg ; $R_T = 6{,}38 \times 10^3$ km ; $h = 23{,}6 \times 10^3$ km

$R = R_T + h = 6{,}38 \times 10^3 + 23{,}6 \times 10^3 = 29{,}98 \times 10^3\ \text{km} = 2{,}998 \times 10^7\ \text{m}$

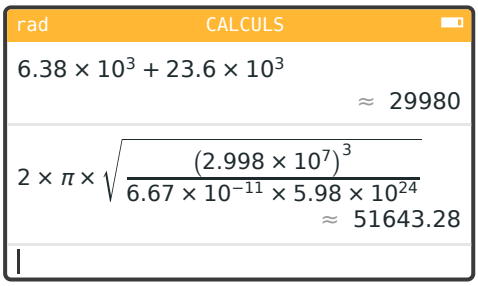
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(2{,}998 \times 10^7)^3}{6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}98 \times 10^{24}}}$$

$\boxed{T = 5{,}16 \times 10^4\ \text{s}}$, soit environ 14 h 20 min.

PIÈGE
Laisser R en kilomètres : G est donnée en unités SI, le rayon doit être en mètres. L'oubli donne une période d'environ 1,6 s, sans aucun sens.

COMPRENDRE
Trois chiffres significatifs, comme les données. On garde R non arrondi dans le calcul et on n'arrondit que le résultat final.

À LA CALCULATRICE



2.1.1 (II-1-a) Compléter la ligne du tableau de l'annexe relative au satellite Giove-A (GALILEO).

Données utiles $R = 29{,}98 \times 10^3$ km et $T = 5{,}16 \times 10^4$ s (I-4-b)

$R^3 = (29{,}98 \times 10^3)^3 = 2{,}69 \times 10^{13}\ \text{km}^3 \qquad T^2 = (5{,}164 \times 10^4)^2 = 2{,}67 \times 10^9\ \text{s}^2$

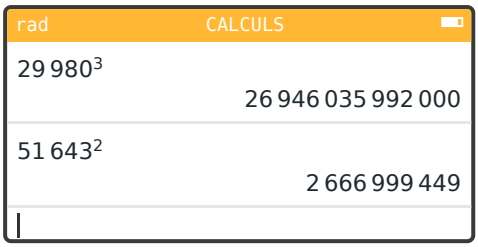
Ligne GALILEO du tableau, avec trois chiffres significatifs comme les autres lignes :

Satellite	R (km)	T (s)	R^3 (km^3)	T^2 (s^2)
GALILEO	$30{,}0 \times 10^3$	$5{,}16 \times 10^4$	$2{,}69 \times 10^{13}$	$2{,}67 \times 10^9$

$\boxed{R = 30{,}0 \times 10^3\ \text{km} ;\ T = 5{,}16 \times 10^4\ \text{s} ;\ R^3 = 2{,}69 \times 10^{13}\ \text{km}^3 ;\ T^2 = 2{,}67 \times 10^9\ \text{s}^2}$

COMPRENDRE
En partant des valeurs déjà arrondies ($30{,}0 \times 10^3$ km et $5{,}16 \times 10^4$ s), on trouve $2{,}70 \times 10^{13}$ km^3 et $2{,}66 \times 10^9$ s^2 : l'écart porte sur le dernier chiffre et ne se voit pas sur le graphique.

À LA CALCULATRICE



2.1.2 (II-1-b) Placer le point correspondant sur le graphique de l'annexe et tracer la courbe donnant T^2 en fonction de R^3.

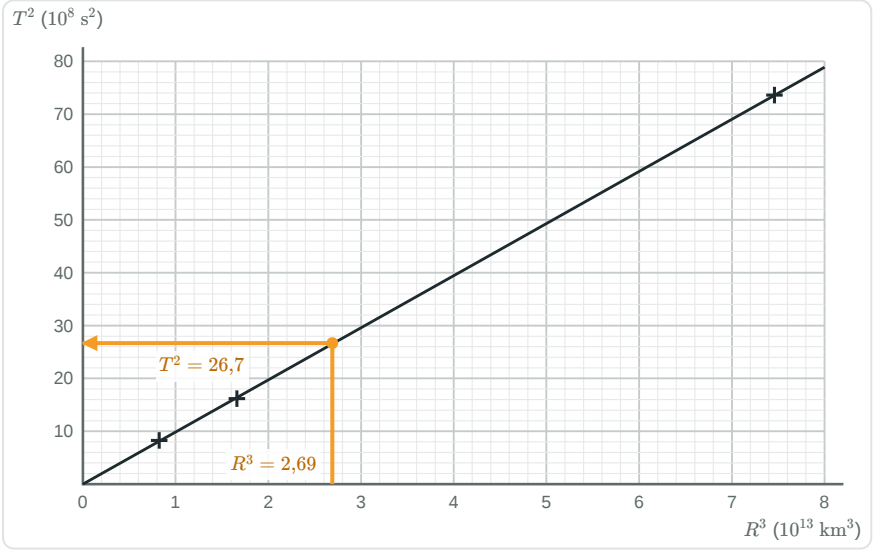
Données utiles $R^3 = 2{,}69 \times 10^{13}\ \text{km}^3$ et $T^2 = 2{,}67 \times 10^{9}\ \text{s}^2$ (II-1-a)

Avec les unités des axes : abscisse $R^3 = 2{,}69 \times 10^{13}\ \text{km}^3$; ordonnée $T^2 = 26{,}7 \times 10^{8}\ \text{s}^2$.

Les quatre points sont alignés avec l'origine : on trace à la règle la droite qui passe par l'origine et au plus près des points.

Point GALILEO de coordonnées $(2{,}69\ ;\ 26{,}7)$; la courbe est une droite passant par l'origine.

PIÈGE
Reporter 2,67 en ordonnée : l'axe est gradué en $10^8\ \text{s}^2$, il faut donc écrire $2{,}67 \times 10^{9} = 26{,}7 \times 10^{8}\ \text{s}^2$.



2.1.2 · Annexe complétée : point GALILEO (en orange) et droite tracée

2.2.1 (II-2-a) Que peut-on déduire du tracé précédent ? Justifier.

La courbe obtenue est une droite qui passe par l'origine du repère.

T^2 est proportionnel à R^3 : $T^2 = k\,R^3$, où k est le coefficient directeur de la droite, le même pour tous les satellites de la Terre.

PIÈGE
Écrire seulement « c'est une droite ». La proportionnalité exige les deux arguments : droite et passage par l'origine.

2.2.2 (II-2-b) Montrer que le résultat de la question I-4-a est conforme au tracé obtenu.

Données utiles point METEOSAT : $R^3 = 7{,}46 \times 10^{13}\ \text{km}^3$, $T^2 = 7{,}36 \times 10^{9}\ \text{s}^2$; G ; M_T

En élevant au carré l'expression de I-4-a : $T^2 = \dfrac{4\pi^2}{G\,M_T}\,R^3$. Cette relation est bien de la forme $T^2 = K\,R^3$, avec $K = \dfrac{4\pi^2}{G\,M_T}$ constante.

Valeur théorique : $K = \dfrac{4\pi^2}{6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}98 \times 10^{24}} = 9{,}90 \times 10^{-14}\ \text{s}^2 \cdot \text{m}^{-3}$

Coefficient directeur de la droite, qui passe par l'origine et par le point METEOSAT, avec $1\ \text{km}^3 = 10^9\ \text{m}^3$:

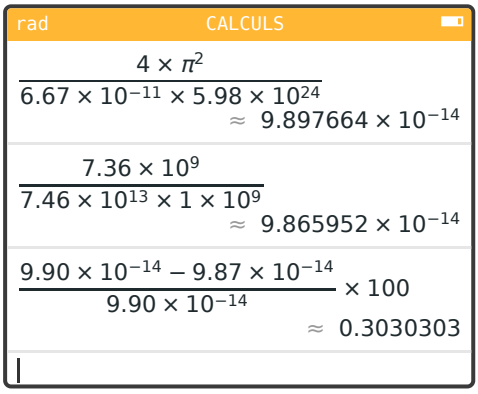
$k = \dfrac{7{,}36 \times 10^{9}}{7{,}46 \times 10^{13} \times 10^{9}} = 9{,}87 \times 10^{-14}\ \text{s}^2 \cdot \text{m}^{-3}$

$k = 9{,}87 \times 10^{-14}\ \text{s}^2 \cdot \text{m}^{-3}$ et $K = 9{,}90 \times 10^{-14}\ \text{s}^2 \cdot \text{m}^{-3}$: écart de 0,3 %, l'expression de I-4-a est conforme au tracé.

PIÈGE
Convertir les km^3 comme des km : $1\ \text{km}^3 = (10^3\ \text{m})^3 = 10^9\ \text{m}^3$, et non $10^3\ \text{m}^3$.

MÉTHODE
Pour le coefficient directeur, choisir un point de la droite tracée le plus éloigné possible de l'origine : la lecture est plus précise.

À LA CALCULATRICE



2.2.3 (II-2-c) Comment nomme-t-on la loi ainsi mise en évidence ?

Le rapport $\dfrac{T^2}{R^3}$ a la même valeur pour tous les satellites de la Terre.

Il s'agit de la **troisième loi de Kepler** (loi des périodes).

COMPRENDRE
La constante $\dfrac{4\pi^2}{G\,M_T}$ ne dépend que de l'astre attracteur : mesurer T et R pour un seul satellite suffit à déterminer la masse de la Terre.