Physique, chimie et stimulateur cardiaque

Bac S 2007 Polynésie (ancien programme) · Exercice 1 **7 points** **Durée conseillée 1 h 31**

1 Partie I. a) Déterminer graphiquement la valeur de la tension E. b) Déterminer graphiquement la constante de temps τ de la décharge, en justifiant brièvement.

a. Le condensateur a été chargé sous la tension E : au début de la décharge, $u_C(0) = E$. On lit l'ordonnée à l'origine de la courbe de l'annexe.

$$E = 5{,}6 \text{ V}$$

b. Lors d'une décharge, à la date $t = \tau$, la tension ne vaut plus que 37 % de sa valeur initiale :

$u_C(\tau) = E\,\mathrm{e}^{-1} = 0{,}37 \times 5{,}6 = 2{,}1$ V

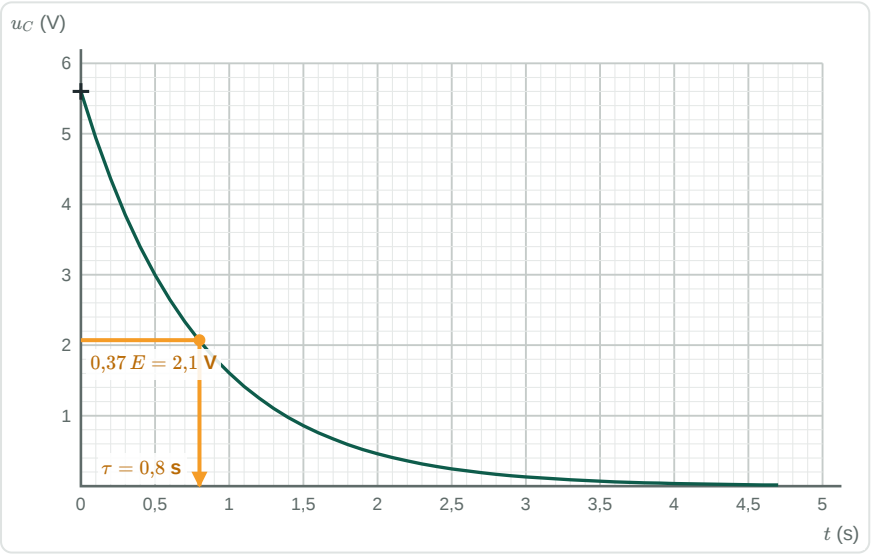
Sur l'annexe, l'horizontale d'ordonnée $2{,}1$ V coupe la courbe en un point d'abscisse $0{,}8$ s.

$$\tau = 0{,}8 \text{ s}$$

COMPRENDRE
La tension aux bornes d'un condensateur ne subit pas de saut : à la fermeture de K, u_C part de la valeur acquise pendant la charge, puis décroît.

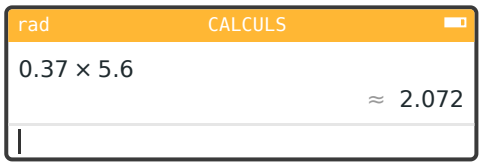
COMPRENDRE
Chiffres significatifs : E est lue avec deux chiffres, on écrit donc $2{,}1$ V. La lecture de τ sur le quadrillage se fait à environ $0{,}05$ s près.

MÉTHODE
Autre tracé possible : la tangente à la courbe en $t = 0$ coupe l'axe des abscisses à $t = \tau$. Il est moins précis, car la pente d'une tangente tracée à la main est incertaine.



1 · Annexe complétée : lecture de E à $t = 0$, puis de τ à $0{,}37\,E$

À LA CALCULATRICE



2 Partie I. a) Avec les notations du schéma, donner la relation entre l'intensité i et la charge q d'une armature (à préciser), puis la relation entre u_R et i. b) En déduire que u_C vérifie l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{RC}\,u_C = 0$. c) Montrer que l'équation différentielle admet une solution de la forme $u_C(t) = A\,\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$. Exprimer A et τ en fonction de E, C et R. d) À l'aide de la valeur de τ obtenue en 1-b, calculer la valeur de R.

Données utiles $\tau = 0{,}8$ s (1.b) ; $C = 0{,}40\ \mu\text{F} = 0{,}40 \times 10^{-6}$ F

a. On note q la charge de l'armature A. La flèche de u_C pointe vers A, donc $q = C\,u_C$. En suivant le sens choisi pour i sur le schéma (de B vers A en passant par R), le courant arrive sur l'armature A :

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

Dans le conducteur ohmique, les flèches de i et de u_R sont de même sens (convention générateur), d'où le signe moins dans la loi d'Ohm.

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \text{ avec } q = q_A, \text{ et } u_R = -R\,i$$

PIÈGE
Écrire $u_R = R\,i$ par habitude. Cette forme suppose des flèches de sens opposés, ce qui n'est pas le cas sur ce schéma.

PIÈGE
Laisser la capacité en microfarads : on obtiendrait $2\ \Omega$, valeur incompatible avec la résistance « de valeur élevée » annoncée par le document.

b. Interrupteur fermé, le condensateur et le conducteur ohmique sont branchés entre les mêmes points : $u_C = u_R$.

Comme $q = C\,u_C$ avec C constante : $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$.

Donc $u_C = u_R = -R\,i = -R\,C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$, soit $R\,C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = 0$.

En divisant par $R\,C$:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}\,u_C = 0}$$

c. On dérive la fonction proposée : $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{A}{\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$.

On reporte dans l'équation différentielle :

$$-\frac{A}{\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{A}{RC}\,\mathrm{e}^{-t/\tau} = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\left(\frac{1}{RC} - \frac{1}{\tau}\right) = 0$$

Le facteur $A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$ n'étant jamais nul, l'égalité est vraie à chaque instant si $\dfrac{1}{RC} - \dfrac{1}{\tau} = 0$, donc si $\tau = R\,C$.

Condition initiale : $u_C(0) = A\,\mathrm{e}^{0} = A$ et $u_C(0) = E$, donc $A = E$.

$$\boxed{A = E \text{ et } \tau = R\,C, \text{ soit } u_C(t) = E\,\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)}$$

d. $\tau = R\,C$ donc $R = \dfrac{\tau}{C}$

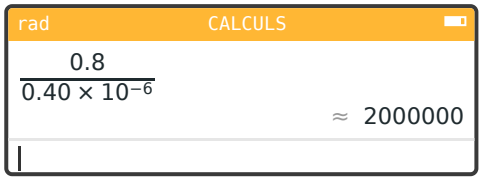
$$R = \frac{0{,}8}{0{,}40 \times 10^{-6}} = 2 \times 10^{6}\ \Omega$$

$$\boxed{R = 2 \times 10^{6}\ \Omega = 2\ \mathrm{M\Omega}}$$

COMPRENDRE

La lecture graphique de τ ne donne qu'un chiffre sûr, d'où un seul chiffre significatif pour R. Avec la valeur $0{,}80$ s admise dans la partie 3, on écrirait $R = 2{,}0\ \mathrm{M\Omega}$.

À LA CALCULATRICE



3 Partie I. a) Calculer la valeur de u_R qui déclenche l'envoi d'une impulsion vers le cœur. b) À quelle date, après le début de la décharge, cette valeur est-elle atteinte ? c) Que se passe-t-il après cette date ? Représenter l'allure de u_R au cours du temps pendant la génération des impulsions, avec les valeurs remarquables. d) Déterminer la fréquence des impulsions, en hertz puis en impulsions par minute. Vérifier la compatibilité avec une fréquence cardiaque normale.

Données utiles $u_R(t) = 5{,}6\ \exp\left(-\dfrac{t}{0{,}80}\right)$, avec u_R en volts et t en secondes

a. Valeur initiale : $u_R(0) = 5{,}6 \times \mathrm{e}^{0} = 5{,}6$ V.

L'impulsion part lorsque u_R atteint e^{-1} fois cette valeur :

$u_R = 5{,}6 \times \mathrm{e}^{-1} = 2{,}1$ V

$u_R = 2{,}1$ V

b. On cherche t tel que $5{,}6\ \exp\left(-\dfrac{t}{0{,}80}\right) = 5{,}6\,\mathrm{e}^{-1}$.

Deux exponentielles sont égales si leurs exposants le sont : $\dfrac{t}{0{,}80} = 1$.

$t = 0{,}80$ s

c. À $t = 0{,}80$ s, l'impulsion est envoyée et l'interrupteur revient en position 1. Le condensateur se recharge presque instantanément à travers r : la tension remonte à $5{,}6$ V. L'interrupteur repasse en position 2 et une nouvelle décharge commence, identique à la précédente.

La tension u_R est donc périodique, en « dents de scie » : décroissance exponentielle de $5{,}6$ V à $2{,}1$ V pendant $0{,}80$ s, puis remontée verticale.

Motif répété toutes les $0{,}80$ s, entre $5{,}6$ V et $2{,}1$ V ; une impulsion à $0{,}80$ s, $1{,}6$ s, $2{,}4$ s…

d. La recharge étant quasi instantanée, la période des impulsions est $T = 0{,}80$ s.

$f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{0{,}80} = 1{,}25$ Hz $\approx 1{,}3$ Hz

En une minute : $\dfrac{60}{0{,}80} = 75$ impulsions.

$f \approx 1{,}3$ Hz, soit 75 impulsions par minute : valeur conforme au rythme d'un cœur au repos (entre 60 et 100 battements par minute environ).

PIÈGE

Tracer des segments de droite entre $5{,}6$ V et $2{,}1$ V, ou laisser la tension descendre jusqu'à zéro. Chaque décharge est une portion d'exponentielle, interrompue à $2{,}1$ V.

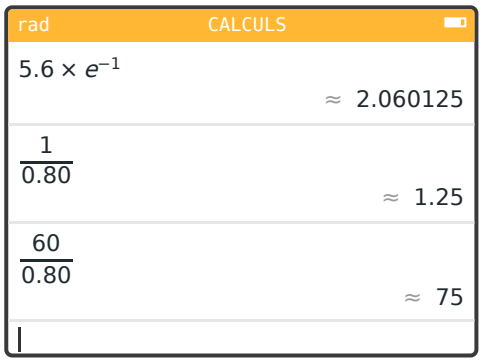
PIÈGE

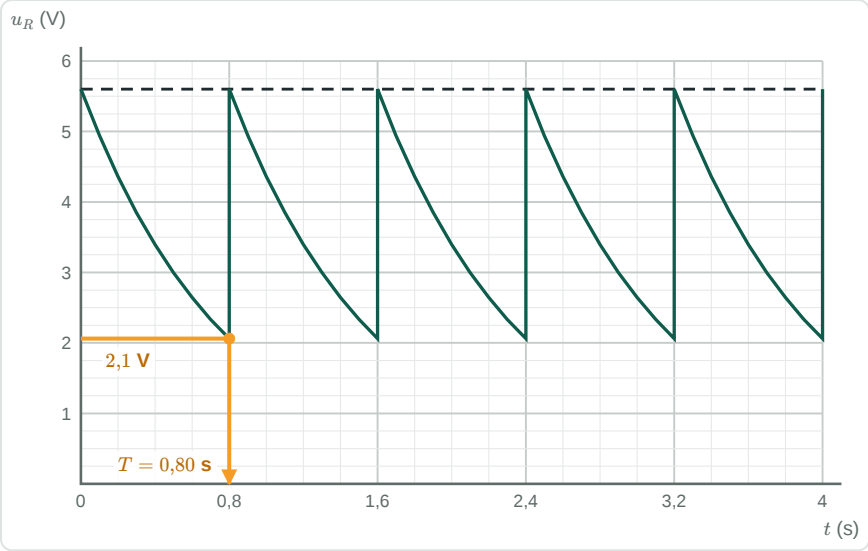
Convertir en multipliant la valeur arrondie : $1{,}3 \times 60 = 78$. On garde $1{,}25$ Hz dans le calcul et on n'arrondit que le résultat final.

COMPRENDRE

Cette date est la constante de temps τ du circuit. Le seuil de déclenchement choisi (e^{-1} fois la valeur initiale) fait de $\tau = RC$ la durée qui sépare deux impulsions.

À LA CALCULATRICE





3 · Allure de $u_R(t)$: décharges de 5,6 V à 2,1 V, recharges quasi instantanées, période $0{,}80$ s

1 Partie II. Répondre par vrai ou faux en justifiant : a) L'électrode de lithium est le pôle négatif de la pile. b) Lors de son fonctionnement, la pile constitue un système chimique en équilibre. c) Lors du fonctionnement de la pile, le quotient de réaction Q_r est inférieur à la constante d'équilibre K. d) La pile est usée lorsque tous les ions Li^+ ont été consommés.

a. À cette électrode, $\mathrm{Li} = \mathrm{Li}^+ + \mathrm{e}^-$: le lithium est oxydé et libère des électrons, qui partent dans le circuit extérieur. Les électrons sortent d'une pile par sa borne négative.

VRAI

b. Une pile qui débite un courant est le siège d'une transformation chimique : des électrons sont échangés et les quantités de matière varient. Le système est hors équilibre. À l'équilibre, plus aucun courant ne circule.

FAUX

c. La réaction de fonctionnement se fait spontanément dans le sens direct (le lithium est consommé). D'après le critère d'évolution spontanée, un système évolue dans le sens direct lorsque $Q_r < K$.

VRAI

d. Dans l'équation $\mathrm{Li} = \mathrm{Li}^+ + \mathrm{e}^-$, les ions Li^+ sont un produit : ils sont formés et non consommés. C'est le lithium métallique qui disparaît ; la pile est usée lorsqu'un réactif est épuisé.

FAUX

COMPRENDRE

Tant que la pile débite, Q_r augmente et se rapproche de K. Si l'égalité $Q_r = K$ était atteinte, la pile ne fournirait plus de courant : elle serait usée.

MÉTHODE

Dans une pile, l'électrode où a lieu l'oxydation (l'anode) est toujours le pôle négatif ; celle où a lieu la réduction (la cathode) est le pôle positif.

2 Partie II. a) Montrer par analyse dimensionnelle qu'une quantité d'électricité peut s'exprimer en ampère-heure, et justifier l'égalité $1\ \text{A}\cdot\text{h} = 3600\ \text{C}$. b) Calculer, en coulombs puis en ampères-heures, la quantité d'électricité que pourrait fournir une pile contenant 1,0 g de lithium.

Données utiles $m = 1{,}0\ \text{g}$; $M(\text{Li}) = 6{,}9\ \text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$; $F = 9{,}65\times10^{4}\ \text{C}\cdot\text{mol}^{-1}$

a. La quantité d'électricité transportée par un courant d'intensité constante I pendant la durée Δt est $Q = I\,\Delta t$.

Sa dimension est donc celle d'une intensité multipliée par un temps : $[Q] = \text{I}\cdot\text{T}$. Elle peut s'exprimer avec une unité d'intensité multipliée par une unité de durée, quelle qu'elle soit : A·s (c'est le coulomb) ou A·h.

Comme $1\ \text{h} = 3600\ \text{s}$: $1\ \text{A}\cdot\text{h} = 1\ \text{A}\times 3600\ \text{s} = 3600\ \text{A}\cdot\text{s}$.

$$1\ \text{A}\cdot\text{h} = 3600\ \text{C}$$

b. D'après $\text{Li} = \text{Li}^{+} + \text{e}^{-}$, chaque atome de lithium consommé libère un électron : $n(\text{e}^{-}) = n(\text{Li}) = \dfrac{m}{M}$.

La charge d'une mole d'électrons est le faraday F (le sujet l'écrit en C ; son unité est le $\text{C}\cdot\text{mol}^{-1}$), d'où :

$$Q_{max} = n(\text{e}^{-})\,F = \frac{m}{M}\,F = \frac{1{,}0}{6{,}9}\times 9{,}65\times10^{4} = 1{,}4\times10^{4}\ \text{C}$$

En ampères-heures : $Q_{max} = \dfrac{1{,}40\times10^{4}}{3600} = 3{,}9\ \text{A}\cdot\text{h}$

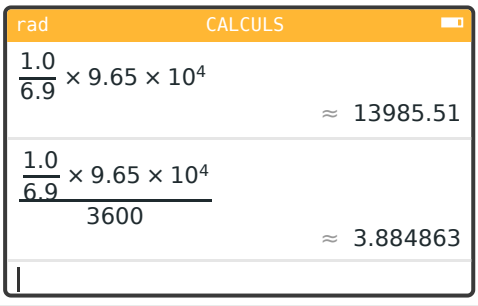
$$Q_{max} = 1{,}4\times10^{4}\ \text{C} = 3{,}9\ \text{A}\cdot\text{h}$$

PIÈGE
Confondre l'ampère-heure avec des « ampères par heure ». C'est un produit : la charge débitée par un courant de 1 A pendant 1 h.

PIÈGE
Diviser la valeur déjà arrondie $1{,}4\times10^{4}$ par 3600 donne aussi $3{,}9$ ici, mais mieux vaut garder la valeur de la calculatrice pour enchaîner.

COMPRENDRE
Le résultat rejoint le tableau de la question 3 : $3{,}9\ \text{A}\cdot\text{h}$ pour 1,0 g, c'est $3{,}9\times10^{3}\ \text{A}\cdot\text{h}\cdot\text{kg}^{-1}$, la capacité massique du lithium (3880).

À LA CALCULATRICE



3 Partie II. a) Pour une même intensité débitée, comment évolue la durée de fonctionnement de la pile en fonction de sa « capacité massique » ? b) Pourquoi utilise-t-on des piles au lithium pour alimenter les stimulateurs cardiaques ?

a. Pour une masse m d'élément, la quantité d'électricité disponible est $Q_{max} = \text{capacité massique} \times m$. La durée de fonctionnement sous l'intensité I est $\Delta t = \dfrac{Q_{max}}{I}$.

À masse et intensité égales, la durée de fonctionnement est proportionnelle à la capacité massique : plus celle-ci est grande, plus la pile dure longtemps.

b. Le lithium a, de loin, la plus grande capacité massique du tableau : $3880\ \text{A} \cdot \text{h} \cdot \text{kg}^{-1}$, près de cinq fois celle de l'argent et environ huit fois celle du zinc ou du cadmium.

Une pile au lithium fournit une longue durée de fonctionnement pour une très faible masse : le boîtier peut être miniaturisé et la pile, implantée dans le corps, n'a pas à être remplacée souvent.

COMPRENDRE
Remplacer la pile impose une intervention chirurgicale. L'autonomie et la petite taille comptent donc bien plus ici que pour un appareil ordinaire.