Pluton & Charon

Bac S 2008 Centres étrangers (ancien programme) · Exercice 3 **5 points** **Durée conseillée 1 h 05**

1.1 Définir un mouvement circulaire uniforme.

Dans un référentiel donné, le mouvement d'un point est circulaire uniforme si :

- sa trajectoire est un cercle (ou un arc de cercle) ;
- la valeur v de sa vitesse reste constante.

Trajectoire circulaire et vitesse de valeur constante.

PIÈGE
Écrire « vitesse constante » sans préciser « valeur ». Le vecteur vitesse change de direction à chaque instant : il n'est pas constant, et l'accélération n'est pas nulle.

1.2 Quelles sont les deux conditions nécessaires pour observer un mouvement circulaire uniforme ?

Pour un mouvement circulaire uniforme de rayon R et de vitesse v, le vecteur accélération (donc la somme des forces) doit être :

- radial et centripète : porté par le rayon et dirigé vers le centre du cercle, donc perpendiculaire au vecteur vitesse à chaque instant ;
- de valeur constante, égale à $a = \dfrac{v^2}{R}$.

Accélération dirigée vers le centre du cercle et de valeur constante $\dfrac{v^2}{R}$.

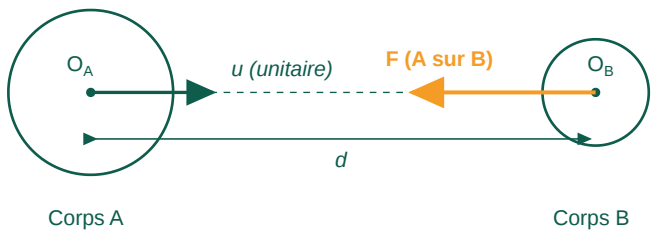
COMPRENDRE
Une accélération perpendiculaire à la vitesse ne modifie pas sa valeur : elle ne fait que courber la trajectoire. C'est pourquoi le mouvement reste uniforme.

1.3 Donner l'expression vectorielle de la force d'interaction gravitationnelle $\overrightarrow{F}_{A\to B}$ exercée par le corps A sur le corps B.

Le vecteur unitaire $\vec{u}$ est dirigé de O_A vers O_B. La force exercée par A sur B est attractive : elle s'applique en O_B et pointe vers O_A, donc dans le sens opposé à $\vec{u}$.

$$\overrightarrow{F}_{A\to B} = -G\,\frac{M_A\,M_B}{d^2}\,\vec{u}$$

PIÈGE
Oublier le signe « $-$ ». Il dépend du sens de $\vec{u}$ sur la figure : ici $\vec{u}$ part de A vers B, alors que la force subie par B est dirigée vers A.



1.3 · Figure 1 du sujet, avec la force exercée par A sur B

2.1 Quelle est la période de révolution de Pluton ? Justifier la réponse.

Données utiles un tour sur elle-même en 6,387 jours solaires ; un tour autour du Soleil en 248 années sidérales

La période de révolution d'un astre est la durée qu'il met pour décrire une fois son orbite autour de l'astre attracteur, ici le Soleil.

La durée de 6,387 jours solaires correspond à un tour de Pluton sur elle-même : c'est sa période de rotation propre.

Période de révolution de Pluton : 248 années sidérales.

PIÈGE
Confondre révolution (tour autour du Soleil) et rotation propre (tour sur soi-même). Les 6,387 jours sont aussi la période de révolution de Charon autour de Pluton, pas celle de Pluton.

2.2.1 Appliquer la seconde loi de Newton au centre d'inertie de Charon et en déduire direction, sens et norme du vecteur accélération $\vec{a}$.

Système : Charon, de masse M_C constante. Référentiel plutonocentrique, supposé galiléen. Seule force : l'attraction gravitationnelle de Pluton.

En notant $\vec{u}$ le vecteur unitaire dirigé de P vers C : $\vec{F}_{P\to C} = -G\dfrac{M_{P1}\,M_C}{R^2}\,\vec{u}$.

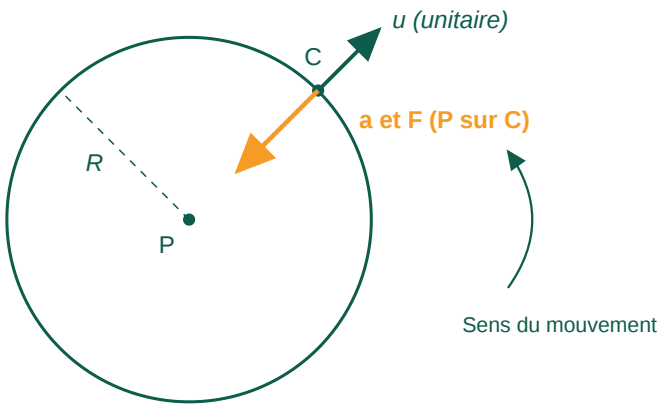
Seconde loi de Newton : $\vec{F}_{P\to C} = M_C\,\vec{a}$, donc $\vec{a} = -G\dfrac{M_{P1}}{R^2}\,\vec{u}$.

- Direction : la droite (PC), c'est-à-dire le rayon de la trajectoire.
- Sens : de C vers P (accélération centripète).

Norme : $a = \dfrac{G\,M_{P1}}{R^2}$, constante car G, M_{P1} et R sont constants.

COMPRENDRE
La masse M_C se simplifie : l'accélération de Charon ne dépend pas de sa propre masse, seulement de celle de l'astre attracteur et de la distance.

MÉTHODE
Toujours annoncer système, référentiel galiléen et bilan des forces avant d'écrire la loi. Ces trois lignes sont notées.



2.2.1 · Figure 2 du sujet, avec la force et l'accélération de Charon

2.2.2 Vérifier que le mouvement circulaire uniforme est une solution de la relation de la question 2.2.1 et montrer que $v = \sqrt{\dfrac{G\,M_{P1}}{R}}$.

D'après 2.2.1, l'accélération de Charon est radiale, centripète et de norme constante : ce sont les deux conditions de la question 1.2. Le mouvement circulaire uniforme est donc bien une solution.

Pour ce mouvement, de rayon R et de vitesse v, la norme de l'accélération vaut $a = \dfrac{v^2}{R}$.

En égalant avec 2.2.1 : $\dfrac{v^2}{R} = \dfrac{G\,M_{P1}}{R^2}$, soit $v^2 = \dfrac{G\,M_{P1}}{R}$.

$v = \sqrt{\dfrac{G\,M_{P1}}{R}}$ (une valeur de vitesse est positive).

PIÈGE
Simplifier trop vite : il reste un seul R au dénominateur, pas R^2. Vérification par les unités : $G\,M/R$ s'exprime en $\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2}$, sa racine en $\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$.

2.2.3 Établir l'expression de la période de révolution T de Charon autour de Pluton.

Pendant une période T, Charon parcourt une fois le périmètre $2\pi R$ de son orbite à la vitesse constante v : $v = \dfrac{2\pi R}{T}$.

$T = \dfrac{2\pi R}{v}$

2.2.4 Déduire des deux questions précédentes la relation $\dfrac{T^2}{R^3} = \dfrac{4\pi^2}{G\,M_{P1}}$.

On élève au carré l'expression de 2.2.3 : $T^2 = \dfrac{4\pi^2 R^2}{v^2}$.

Avec $v^2 = \dfrac{G\,M_{P1}}{R}$ (2.2.2) :

$$T^2 = 4\pi^2 R^2 \times \frac{R}{G\,M_{P1}} = \frac{4\pi^2 R^3}{G\,M_{P1}}$$

$\dfrac{T^2}{R^3} = \dfrac{4\pi^2}{G\,M_{P1}}$

COMPRENDRE
C'est la troisième loi de Kepler : le rapport T^2/R^3 est le même pour tous les satellites d'un même astre et ne dépend que de la masse de cet astre.

MÉTHODE
Élever T au carré avant de remplacer v évite de manipuler une racine au dénominateur.

2.3.1 À l'aide de la question 2.2.4, expliquer ce qui a permis, à partir de 1978, de déterminer la masse de Pluton.

La relation de 2.2.4 donne $M_{P1} = \dfrac{4\pi^2 R^3}{G\,T^2}$: la masse de Pluton se calcule si l'on connaît la période T et le rayon R de l'orbite d'un de ses satellites.

Avant 1978, on ne connaissait aucun satellite à Pluton. La découverte de Charon a rendu possibles ces deux mesures.

La mesure de la période de révolution de Charon et de sa distance à Pluton donne accès à M_{P1}.

2.3.2 En utilisant les tableaux de données et la question 2.2.4, calculer la masse M_{P1} de Pluton.

Données utiles $G = 6{,}673 \times 10^{-11}\ \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$; $R = 1{,}94 \times 10^4$ km ; $T = 6{,}387$ jours solaires ; 1 jour solaire = 86 400 s

$M_{P1} = \dfrac{4\pi^2 R^3}{G\,T^2}$ avec $R = 1{,}94 \times 10^7$ m et $T = 6{,}387 \times 86\,400 = 5{,}518 \times 10^5$ s.

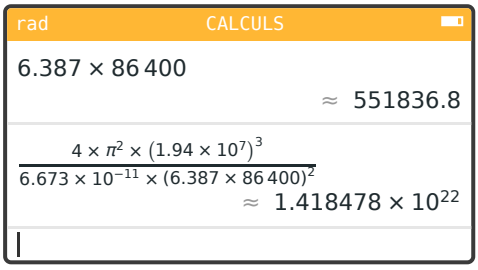
$$M_{P1} = \frac{4\pi^2 \times (1{,}94 \times 10^7)^3}{6{,}673 \times 10^{-11} \times (6{,}387 \times 86\,400)^2}$$

$$\boxed{M_{P1} = 1{,}42 \times 10^{22}\ \text{kg}}$$

PIÈGE
Laisser R en kilomètres ou T en jours. Comme R est au cube, l'oubli de la conversion fausse le résultat d'un facteur 10^9.

COMPRENDRE
Trois chiffres significatifs, comme R, la donnée la moins précise. R est la distance entre les centres : il ne faut ajouter aucun rayon.

À LA CALCULATRICE



2.3.3 En tenant compte de la masse de Charon, on a $\dfrac{T^2}{R^3} = \dfrac{4\pi^2}{G\,(M_{P2} + M_C)}$. En déduire la masse M_{P2} de Pluton.

Données utiles $M_C = 1{,}61 \times 10^{21}$ kg ; $M_{P1} = 1{,}42 \times 10^{22}$ kg (2.3.2)

La relation donne $M_{P2} + M_C = \dfrac{4\pi^2 R^3}{G\,T^2}$. Le second membre est exactement la masse M_{P1} calculée en 2.3.2, donc :

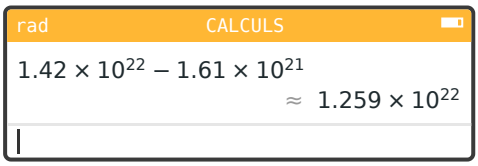
$$M_{P2} = M_{P1} - M_C = 1{,}42 \times 10^{22} - 1{,}61 \times 10^{21}$$

$$\boxed{M_{P2} = 1{,}26 \times 10^{22}\ \text{kg}}$$

PIÈGE
Soustraire les deux nombres sans regarder les puissances de dix : $1{,}61 \times 10^{21} = 0{,}161 \times 10^{22}$.

MÉTHODE
Reconnaître une expression déjà calculée évite de refaire toute l'application numérique : ici, la première méthode donnait en réalité la masse totale du système.

À LA CALCULATRICE



2.3.4 La valeur admise pour la masse de Pluton est $1{,}31 \times 10^{22}$ kg. Discuter de la pertinence de l'hypothèse formulée à la question 2.3.3.

Données utiles $M_{P1} = 1{,}42 \times 10^{22}$ kg (2.3.2) ; $M_{P2} = 1{,}26 \times 10^{22}$ kg (2.3.3)

Écart relatif de chaque valeur avec la valeur admise :

$$\frac{|M_{P1} - M_{\text{adm}}|}{M_{\text{adm}}} = \frac{1{,}42 - 1{,}31}{1{,}31} = 8{,}4\ \%$$

$$\frac{|M_{P2} - M_{\text{adm}}|}{M_{\text{adm}}} = \frac{1{,}31 - 1{,}26}{1{,}31} = 3{,}8\ \%$$

La valeur M_{P2} est deux fois plus proche de la valeur admise que M_{P1}.

De plus $\frac{M_C}{M_{\text{adm}}} = \frac{1{,}61 \times 10^{21}}{1{,}31 \times 10^{22}} = 12\ \%$: Charon n'est pas négligeable devant Pluton.

L'hypothèse de 2.3.3 (masse de Charon non négligeable) est pertinente : écart de 3,8 % au lieu de 8,4 %.

COMPRENDRE

Il reste 4 % d'écart : l'orbite n'est pas rigoureusement celle du modèle et R n'est connu qu'à trois chiffres. Or R est au cube : 1 % d'erreur sur R donne 3 % sur la masse.

À LA CALCULATRICE

