Science et sport

Bac S 2007 Nouvelle-Calédonie rattrapage (ancien programme) · Exercice 3 **5,5 points** **Durée conseillée 1 h 05**

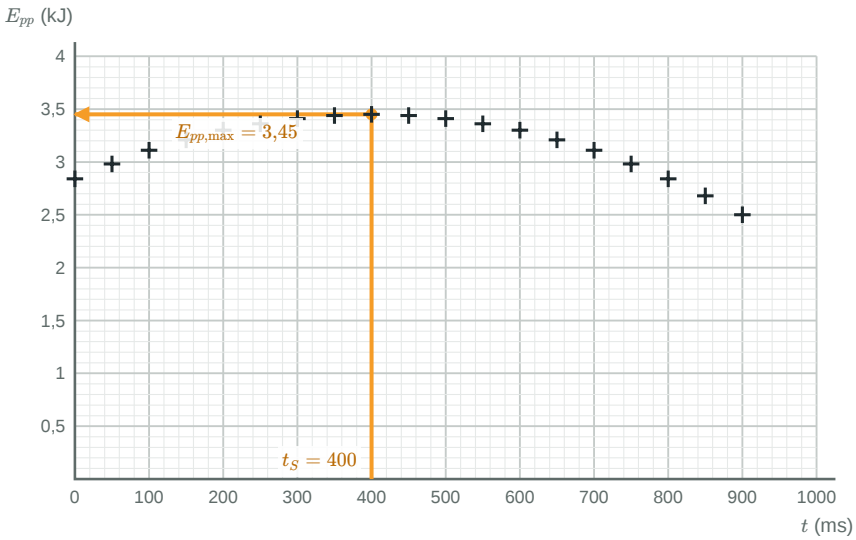
1.1 À l'aide de la figure 7, déterminer l'altitude y_S du centre d'inertie G à la date t_S où l'énergie potentielle de pesanteur est maximale.

Données utiles $m = 70{,}0$ kg ; $g = 9{,}80\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$; $E_{pp} = m\,g\,y$

Sur la figure 7, le maximum est atteint à $t_S \approx 400$ ms et vaut $E_{pp,\max} \approx 3{,}45\ \text{kJ} = 3{,}45 \times 10^3\ \text{J}$.

Comme $E_{pp,\max} = m\,g\,y_S$: $\quad y_S = \dfrac{E_{pp,\max}}{m\,g} = \dfrac{3{,}45 \times 10^3}{70{,}0 \times 9{,}80}$

$$y_S \approx 5{,}0\ \text{m}$$

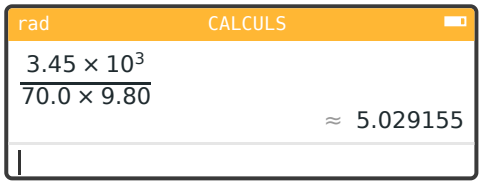


1.1 · Figure 7 du sujet, avec la lecture du maximum

PIÈGE
L'axe vertical est gradué en kJ : il faut convertir en joules avant de diviser par $m\,g$, sinon on trouve une altitude mille fois trop petite.

COMPRENDRE
La lecture graphique est fiable à $0{,}05$ kJ près : deux chiffres significatifs suffisent pour y_S. De façon générale, le résultat garde autant de chiffres que la donnée la moins précise.

À LA CALCULATRICE



1.2.1 Donner l'expression de l'énergie mécanique du système {plongeur en interaction avec la Terre} en fonction de m, g, y et v.

L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle de pesanteur :

$$E_m = E_c + E_{pp} = \frac{1}{2}\,m\,v^2 + m\,g\,y$$

1.2.2 Dire, en justifiant, comment cette énergie évolue au cours du temps.

L'action de l'air étant négligée, le plongeur n'est soumis qu'à son poids, qui est une force conservative. Aucune force non conservative ne travaille.

L'énergie mécanique se conserve : $E_m = \text{constante}$ pendant tout le saut.

COMPRENDRE
Pendant la montée, l'énergie cinétique diminue et l'énergie potentielle augmente d'autant ; c'est l'inverse pendant la descente. Seule leur somme reste fixe.

1.2.3 À la date t_1 où les mains touchent l'eau, exprimer, en justifiant, l'énergie cinétique du plongeur en fonction de v_0, m, g, y_0 et y_1, puis la calculer.

Données utiles $v_0 = 4{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $y_0 = 4{,}0$ m ; $y_1 = 1{,}0$ m ; $m = 70{,}0$ kg ; $g = 9{,}80\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

L'énergie mécanique a la même valeur au départ du saut et à la date t_1 (1.2.2) :

$$\frac{1}{2}\,m\,v_0^2 + m\,g\,y_0 = E_c(t_1) + m\,g\,y_1$$

donc $E_c(t_1) = \frac{1}{2}\,m\,v_0^2 + m\,g\,(y_0 - y_1)$

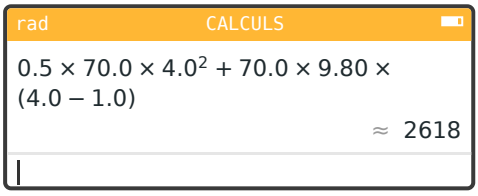
$$E_c(t_1) = \frac{1}{2}\times 70{,}0\times 4{,}0^2 + 70{,}0\times 9{,}80\times(4{,}0-1{,}0) = 2\,618\ \text{J}$$

$$\boxed{E_c(t_1) = \frac{1}{2}\,m\,v_0^2 + m\,g\,(y_0 - y_1) \approx 2{,}6\times 10^3\ \text{J}}$$

PIÈGE
À t_1 le centre d'inertie est encore à $1{,}0$ m au-dessus de l'eau : l'énergie potentielle n'est pas nulle. La hauteur de chute de G est $y_0 - y_1 = 3{,}0$ m, pas $4{,}0$ m.

MÉTHODE
Conservation de l'énergie : écrire E_m en deux positions, l'une où tout est connu, l'autre où figure l'inconnue, puis isoler cette inconnue avant de passer aux nombres.

À LA CALCULATRICE



1.2.4 En déduire l'expression de la vitesse v_1 à la date t_1 et calculer sa valeur.

Données utiles $E_c(t_1) = 2\,618$ J (1.2.3) ; $m = 70{,}0$ kg

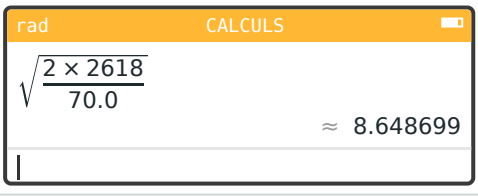
$E_c(t_1) = \frac{1}{2}\,m\,v_1^2$ donc $v_1 = \sqrt{\dfrac{2\,E_c(t_1)}{m}} = \sqrt{v_0^2 + 2\,g\,(y_0 - y_1)}$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\times 2\,618}{70{,}0}}$$

$$\boxed{v_1 = \sqrt{\frac{2\,E_c(t_1)}{m}} \approx 8{,}6\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$$

COMPRENDRE
L'expression littérale montre que v_1 ne dépend ni de la masse du plongeur ni de la direction de $\vec{v}_0$: seules comptent la vitesse initiale et la hauteur de chute.

À LA CALCULATRICE



2.1 Au moment où il amorce sa remontée, les mains du plongeur ont-elles atteint le fond du bassin ? Justifier.

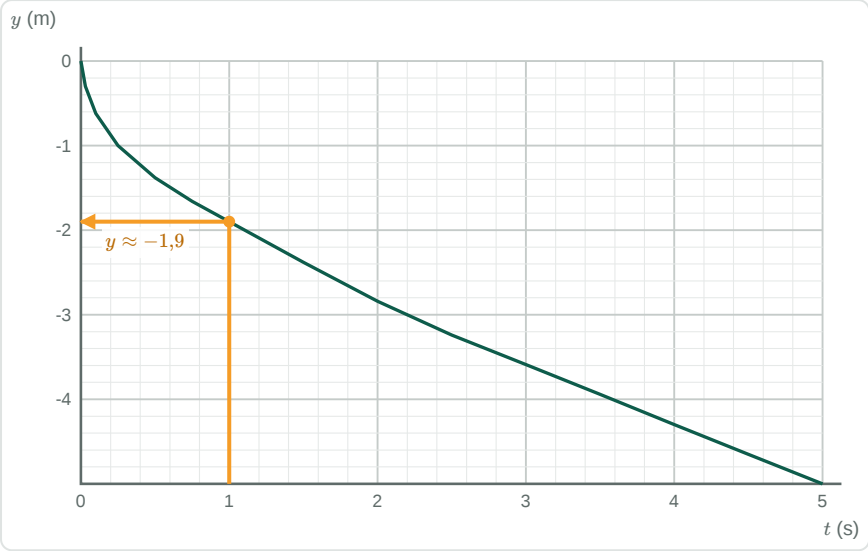
Données utiles remontée amorcée à $t = 1{,}0$ s ; mains à $1{,}0$ m de G ; profondeur du bassin : $5{,}0$ m

Sur la figure 8, à $t = 1{,}0$ s, on lit $y \approx -1{,}9$ m : le centre d'inertie est à environ $1{,}9$ m sous la surface.

Les mains tendues sont $1{,}0$ m plus bas, soit à environ $1{,}9 + 1{,}0 = 2{,}9$ m de profondeur.

$2{,}9\ \text{m} < 5{,}0\ \text{m}$: les mains n'ont pas atteint le fond quand le plongeur amorce sa remontée.

PIÈGE
La courbe donne la position de G, pas celle des mains. Il faut ajouter $1{,}0$ m à la profondeur lue avant de comparer à celle du bassin.



2.1 · Figure 8 du sujet, avec la lecture à $t = 1{,}0$ s

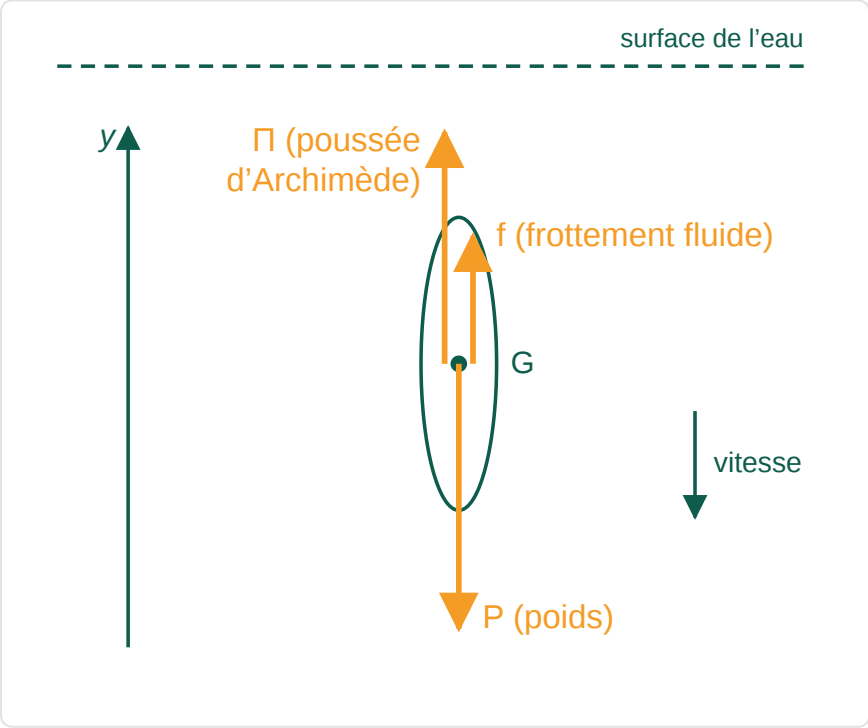
2.2.1 Nommer les forces qui s'exercent sur le plongeur dans l'eau et les représenter, sans souci d'échelle, en son centre d'inertie G.

Le plongeur, qui descend, est soumis à trois forces, toutes verticales :

- son poids $\vec{P}$, vers le bas, de valeur $P = m\,g$;
- la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$, vers le haut, de valeur $\Pi = \rho\,V\,g$;
- la force de frottement fluide $\vec{f}$, opposée à la vitesse donc vers le haut, de valeur $f = k\,v^2$.

Trois forces : poids $\vec{P}$ (vers le bas), poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$ et frottement fluide $\vec{f}$ (vers le haut).

PIÈGE
Le frottement n'est pas « vers le haut » par nature : il s'oppose à la vitesse. C'est parce que le plongeur descend que $\vec{f}$ est ici dirigée vers le haut.



2.2.1 · Forces appliquées en G pendant la descente (les deux forces vers le haut sont dessinées côte à côte pour rester lisibles)

2.2.2 En appliquant la deuxième loi de Newton, montrer que $\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} - \dfrac{k}{m}v_y^2 + g\left(1 - \dfrac{\rho V}{m}\right) = 0$.

Système {plongeur}, de masse m constante ; référentiel terrestre supposé galiléen.

Deuxième loi de Newton : $\vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{f} = m\,\vec{a}$

En projection sur l'axe (Oy) orienté vers le haut, avec $a_y = \dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}$ et $v^2 = v_y^2$:

$$-m\,g + \rho V\,g + k\,v_y^2 = m\,\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}$$

On divise par m : $\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{k}{m}v_y^2 - g + \dfrac{\rho V}{m}g$, puis on regroupe dans le membre de gauche :

$\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} - \dfrac{k}{m}v_y^2 + g\left(1 - \dfrac{\rho V}{m}\right) = 0$: c'est l'équation attendue.

PIÈGE
Le signe de chaque projection se décide sur le schéma : $-m\,g$ pour le poids, mais $+\rho V g$ et $+k\,v_y^2$ pour les deux forces dirigées vers le haut. Écrire $-k\,v_y^2$ change l'équation.

COMPRENDRE
v_y est négative (le plongeur descend), mais v_y^2 est positif : le terme $+k\,v_y^2$ donne bien une force vers le haut sans qu'on ait à écrire de valeur absolue.

2.2.3 En déduire, en justifiant, l'expression de la valeur v_p de la vitesse en régime permanent.

En régime permanent, la vitesse ne varie plus : $\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = 0$ et $v_y^2 = v_p^2$.

L'équation différentielle devient $-\dfrac{k}{m}v_p^2 + g\left(1 - \dfrac{\rho V}{m}\right) = 0$, soit $v_p^2 = \dfrac{m\,g}{k}\left(1 - \dfrac{\rho V}{m}\right)$.

$$v_p = \sqrt{\frac{m\,g}{k}\left(1 - \frac{\rho V}{m}\right)} = \sqrt{\frac{g\,(m - \rho V)}{k}}$$

COMPRENDRE
En régime permanent les forces se compensent : $P = \Pi + f$. On retrouve la même expression en écrivant directement $m\,g = \rho V g + k\,v_p^2$.

2.2.4 Calculer v_p.

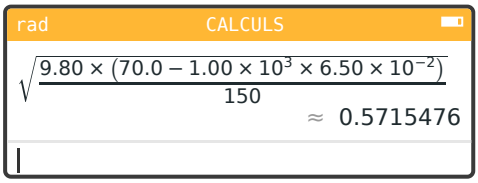
Données utiles $\rho = 1{,}00 \times 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$; $V = 6{,}50 \times 10^{-2}\ \mathrm{m^3}$; $k = 150\ \mathrm{kg \cdot m^{-1}}$; $m = 70{,}0\ \mathrm{kg}$; $g = 9{,}80\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$

$$v_p = \sqrt{\frac{g\,(m - \rho V)}{k}} = \sqrt{\frac{9{,}80 \times (70{,}0 - 1{,}00 \times 10^3 \times 6{,}50 \times 10^{-2})}{150}} = \sqrt{\frac{9{,}80 \times 5{,}0}{150}}$$

$v_p \approx 0{,}57\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

COMPRENDRE
La différence $m - \rho V = 70{,}0 - 65{,}0 = 5{,}0$ kg n'a plus que deux chiffres significatifs : le résultat aussi. Le plongeur est à peine plus dense que l'eau, d'où une vitesse limite faible.

À LA CALCULATRICE



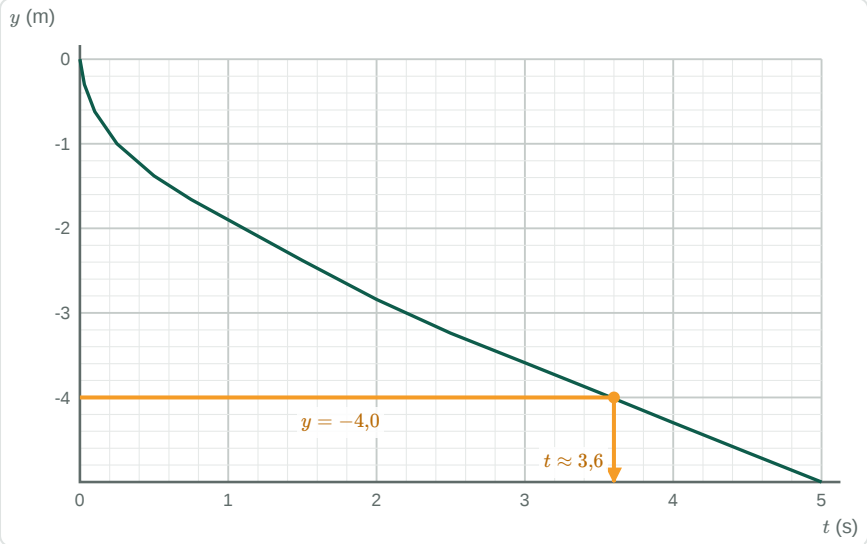
2.2.5 En exploitant la figure 8, dire si le plongeur a atteint le régime permanent avant que ses mains ne touchent le fond.

Données utiles $v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$; mains à $1{,}0$ m de G ; profondeur du bassin : $5{,}0$ m

Les mains touchent le fond quand G est à $1{,}0$ m au-dessus de lui, soit $y = -5{,}0 + 1{,}0 = -4{,}0$ m. Sur la figure 8, cela correspond à $t \approx 3{,}6$ s.

v_y est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $y(t)$. La courbe, d'abord très pentue, s'incurve puis devient pratiquement une droite à partir de $t \approx 3$ s : v_y est alors constante.

Oui : le régime permanent est atteint vers $t \approx 3$ s, avant que les mains ne touchent le fond ($t \approx 3{,}6$ s).



2.2.5 · Figure 8 du sujet : date à laquelle les mains toucheraient le fond

COMPRENDRE

La pente de la partie rectiligne vaut environ $0{,}7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, un peu plus que $v_p = 0{,}57\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$: la simulation tracée ne correspond pas exactement aux valeurs numériques données. Cela ne change pas la conclusion.

MÉTHODE

Sur un graphe de position, une vitesse constante se reconnaît à une portion rectiligne ; sur un graphe de vitesse, à un palier horizontal.

2.3 À l'aide des relations (1) et (2) de la méthode d'Euler, compléter le tableau 1 de l'annexe.

Données utiles $v_y(t_n) = -2{,}21\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $a_y(t_n) = 9{,}75\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; $\Delta t = 1{,}20 \times 10^{-2}$ s ; relation (2) : $a_y = 2{,}14\, v_y^2 - 0{,}700$

Relation (1) : $v_y(t_{n+1}) = v_y(t_n) + a_y(t_n)\,\Delta t = -2{,}21 + 9{,}75 \times 1{,}20 \times 10^{-2} = -2{,}09\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

Relation (2) : $a_y(t_{n+1}) = 2{,}14 \times v_y^2(t_{n+1}) - 0{,}700 = 2{,}14 \times (-2{,}09)^2 - 0{,}700 = 8{,}65\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

$v_y(t_{n+1}) = -2{,}09\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ et $a_y(t_{n+1}) = 8{,}65\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

Dates en s	v_y en m·s⁻¹	a_y en m·s⁻²
$t_n = 1{,}44 \times 10^{-1}$	− 2,21	9,75
$t_{n+1} = 1{,}56 \times 10^{-1}$	**− 2,09**	**8,65**
$t_{n+2} = 1{,}68 \times 10^{-1}$	− 1,99	7,77

2.3 · Tableau 1 de l'annexe complété

PIÈGE
Le calcul de $v_y(t_{n+1})$ utilise l'accélération de la ligne précédente, $a_y(t_n)$, et non celle de la même ligne. Attention aussi au signe : v_y est négative mais augmente.

MÉTHODE
Contrôle : reprendre la relation (1) à la ligne suivante. $-2{,}09 + 8{,}65 \times 1{,}20 \times 10^{-2} = -1{,}99\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, valeur déjà inscrite dans le tableau pour t_{n+2}.

À LA CALCULATRICE

