Chute verticale d'un boulet

Bac S 2011 Métropole (ancien programme) · Exercice 1 **5,5 points** **Durée conseillée 1 h 05**

1.1.1 Exprimer les distances x_1, x_2 et x_3 parcourues au bout des durées τ, 2τ et 3τ en fonction de g et de τ.

Données utiles $x(t) = \frac{1}{2} g\, t^2$

On remplace t par τ, puis 2τ, puis 3τ dans l'équation horaire :

$$x_1 = x(\tau) = \frac{1}{2} g\, \tau^2$$

$$x_2 = x(2\tau) = \frac{1}{2} g\, (2\tau)^2 = 2\, g\, \tau^2$$

$$x_3 = x(3\tau) = \frac{1}{2} g\, (3\tau)^2 = \frac{9}{2} g\, \tau^2$$

$$\boxed{x_1 = \frac{1}{2} g\, \tau^2 \ ; \ x_2 = 2\, g\, \tau^2 \ ; \ x_3 = \frac{9}{2} g\, \tau^2}$$

PIÈGE
Oublier la parenthèse : $(2\tau)^2 = 4\tau^2$ et non $2\tau^2$. La distance est multipliée par 4 quand la durée double.

1.1.2 Exprimer $h_1 = x_1 - x_0$ en fonction de g et de τ, puis $h_2 = x_2 - x_1$ et $h_3 = x_3 - x_2$ en fonction de h_1.

Données utiles $x_0 = 0$; x_1, x_2, x_3 (1.1.1)

$$h_1 = x_1 - x_0 = \frac{1}{2} g\, \tau^2$$

$$h_2 = x_2 - x_1 = 2\, g\, \tau^2 - \frac{1}{2} g\, \tau^2 = \frac{3}{2} g\, \tau^2 = 3\, h_1$$

$$h_3 = x_3 - x_2 = \frac{9}{2} g\, \tau^2 - 2\, g\, \tau^2 = \frac{5}{2} g\, \tau^2 = 5\, h_1$$

$$\boxed{h_1 = \frac{1}{2} g\, \tau^2 \ ; \ h_2 = 3\, h_1 \ ; \ h_3 = 5\, h_1}$$

COMPRENDRE
x_n est la distance totale depuis O ; h_n est la distance parcourue pendant le seul n-ième intervalle de durée τ.

1.1.3 Retrouve-t-on la suite des hauteurs de chute annoncée par Galilée dans l'extrait n°1 ? Justifier.

Données utiles h_1, h_2, h_3 (1.1.2)

Galilée annonce que, pendant des durées égales successives, le mobile parcourt une aune, puis trois, puis cinq.

Le calcul donne des hauteurs successives h_1, $3\, h_1$, $5\, h_1$: elles sont entre elles comme 1, 3, 5.

Oui : on retrouve la suite des nombres impairs annoncée par Galilée.

COMPRENDRE
Cas général : $h_n = \frac{1}{2} g\, \tau^2 \left[n^2 - (n-1)^2\right] = (2n-1)\, h_1$, et $2n-1$ décrit tous les nombres impairs.

1.2.1 Attribuer, parmi les propositions a), b) et c), celle qui correspond à la théorie d'Aristote et celle qui correspond à la théorie de Galilée.

Pour Aristote, la boule de cent livres touche terre bien avant celle d'une livre : le boulet le plus lourd tombe en moins de temps.

Pour Galilée, les deux boules « arrivent en même temps ».

Aristote : proposition b) ; Galilée : proposition c).

PIÈGE
Confondre a) et b). « Tomber plus vite » signifie une durée de chute plus courte : la durée diminue quand la masse augmente.

1.2.2 Calculer la durée Δt de la chute d'un boulet qui tombe d'une hauteur H. Proposer une explication à l'écart avec la valeur annoncée dans l'extrait n°2.

Données utiles $H = 57$ m ; $g = 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; durée annoncée par Galilée : 5 s

Le boulet part de $x_0 = 0$ à $t_0 = 0$ et touche le sol quand $x(\Delta t) = H$:

$H = \frac{1}{2} g\,\Delta t^2$ donc $\Delta t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2 \times 57}{9{,}8}} = 3{,}4\ \text{s}$$

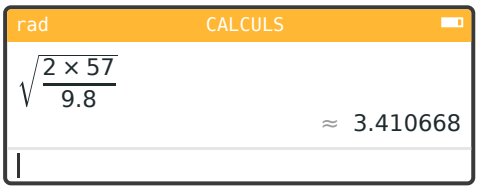
Galilée annonce cinq secondes, soit une durée nettement plus longue. Deux explications : le modèle néglige l'action de l'air, qui freine le boulet ; surtout, Galilée ne disposait pas d'un chronomètre, sa mesure d'une durée aussi brève était très imprécise.

$\Delta t = 3{,}4$ s, inférieure aux 5 s annoncées.

PIÈGE
Oublier la racine carrée, ou écrire $\Delta t = \sqrt{\frac{H}{2g}}$.
Vérifier l'ordre de grandeur : quelques secondes.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme H et g. La suite de l'exercice montre que l'air n'allonge la chute que de quelques centièmes de seconde : l'écart vient donc avant tout de la mesure.

À LA CALCULATRICE

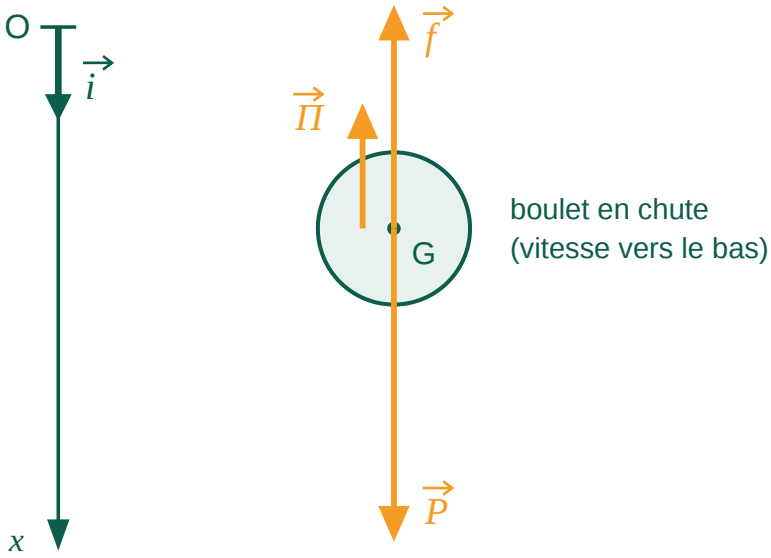


2.1 Représenter, sans souci d'échelle, les trois forces qui s'exercent sur le boulet lors de la chute.

- le poids $\vec{P}$: vertical, vers le bas ;
- la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$: verticale, vers le haut ;
- la force de frottement $\vec{f}$: verticale, opposée au mouvement, donc vers le haut.

$\vec{P}$ vers le bas ; $\vec{\Pi}$ et $\vec{f}$ vers le haut (voir schéma).

PIÈGE
Dessiner $\vec{f}$ vers le bas. Le frottement s'oppose toujours au vecteur vitesse : le boulet descend, la force est vers le haut.



2.1 · Les trois forces appliquées au boulet, sans souci d'échelle ($\vec{\Pi}$ est décalée pour rester lisible)

2.2 Établir le rapport des expressions du poids et de la poussée d'Archimède et en déduire que la poussée d'Archimède est négligeable.

Données utiles $\rho_{air} = 1{,}29\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$; $\rho_{fer} = 7{,}87\times10^{3}\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$

Poids du boulet de volume V_S : $P = m\,g = \rho_{fer}\,V_S\,g$

Poussée d'Archimède, égale au poids de l'air déplacé : $\Pi = \rho_{air}\,V_S\,g$

$$\frac{P}{\Pi} = \frac{\rho_{fer}\,V_S\,g}{\rho_{air}\,V_S\,g} = \frac{\rho_{fer}}{\rho_{air}} = \frac{7{,}87\times10^{3}}{1{,}29} = 6{,}10\times10^{3}$$

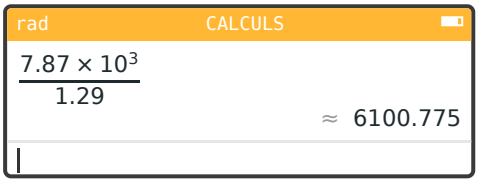
Le poids est environ 6 000 fois plus grand que la poussée d'Archimède.

$\dfrac{P}{\Pi} = \dfrac{\rho_{fer}}{\rho_{air}} = 6{,}10\times10^{3}$: Π est négligeable devant P.

COMPRENDRE
Le rapport ne dépend ni du rayon ni de la masse : la conclusion vaut pour les deux boulets.

MÉTHODE
Pour montrer qu'une force est négligeable devant une autre, former leur rapport : au-delà de 100 environ, on peut négliger la plus petite.

À LA CALCULATRICE



2.3.1 Appliquer la deuxième loi de Newton, projeter sur l'axe (Ox) vertical orienté vers le bas et déterminer l'expression de $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$.

Données utiles $f = \dfrac{1}{2}\pi R^2\,\rho_{air}\,C\,v^2$; Π négligeable (2.2)

Système {boulet}, de masse m ; référentiel terrestre supposé galiléen.
Forces : $\vec{P}$ et $\vec{f}$ (la poussée d'Archimède est négligée).

Deuxième loi de Newton : $\vec{P} + \vec{f} = m\,\vec{a}$

Projection sur (Ox), orienté vers le bas : $P_x = +m\,g$, $f_x = -f$ et $a_x = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$, donc

$$m\,g - \frac{1}{2}\pi R^2\,\rho_{air}\,C\,v^2 = m\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - \dfrac{\pi R^2\,\rho_{air}\,C}{2\,m}\,v^2$

PIÈGE
Se tromper de signe : l'axe est orienté vers le bas, le poids est donc compté positivement et le frottement négativement.

2.3.2 En déduire que la vitesse limite a pour expression $v_\ell = \sqrt{\dfrac{8\,\rho_{fer}\,R\,g}{3\,\rho_{air}\,C}}$.

Données utiles $V_S = \dfrac{4}{3}\pi R^3$; $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ (2.3.1)

Quand la vitesse limite est atteinte, $v = v_\ell$ est constante, donc $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$:

$$g = \frac{\pi R^2\,\rho_{air}\,C}{2\,m}\,v_\ell^2 \text{ soit } v_\ell^2 = \frac{2\,m\,g}{\pi R^2\,\rho_{air}\,C}$$

Or $m = \rho_{fer}\,V_S = \dfrac{4}{3}\pi R^3\,\rho_{fer}$, d'où

$$v_\ell^2 = \frac{2 \times \frac{4}{3}\pi R^3\,\rho_{fer}\,g}{\pi R^2\,\rho_{air}\,C} = \frac{8\,\rho_{fer}\,R\,g}{3\,\rho_{air}\,C}$$

La vitesse est positive :

$v_\ell = \sqrt{\dfrac{8\,\rho_{fer}\,R\,g}{3\,\rho_{air}\,C}}$, expression attendue.

MÉTHODE
Vitesse limite : écrire que la dérivée de la vitesse est nulle dans l'équation différentielle, puis isoler v_ℓ. Physiquement, le frottement compense alors exactement le poids.

2.3.3 Vérifier, par une analyse dimensionnelle, que l'expression de v_ℓ est bien homogène à une vitesse.

C et les nombres 8 et 3 sont sans dimension ; le rapport $\dfrac{\rho_{fer}}{\rho_{air}}$ de deux masses volumiques l'est aussi.

Il reste $R\,g$: R est une longueur (m) et g une accélération ($\mathrm{m \cdot s^{-2}}$), donc $R\,g$ s'exprime en $\mathrm{m^2 \cdot s^{-2}}$.

$$[v_\ell] = \sqrt{\mathrm{L} \times \mathrm{L \cdot T^{-2}}} = \sqrt{\mathrm{L^2 \cdot T^{-2}}} = \mathrm{L \cdot T^{-1}}$$

v_ℓ s'exprime en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$: l'expression est homogène à une vitesse.

MÉTHODE
Repérer d'abord tout ce qui est sans dimension (constantes, rapports de grandeurs de même nature), puis ne traiter que les grandeurs restantes.

2.4 Exprimer le rapport $\dfrac{v_{2\ell}}{v_{1\ell}}$ en fonction des seuls rayons R_1 et R_2 et en déduire le boulet qui a la vitesse limite la plus élevée.

Données utiles $R_1 = 2{,}2$ cm ; $R_2 = 10{,}1$ cm ; v_ℓ (2.3.2)

Les deux boulets sont en fer et tombent dans l'air : ρ_{fer}, ρ_{air}, g et C sont les mêmes, ils se simplifient dans le rapport.

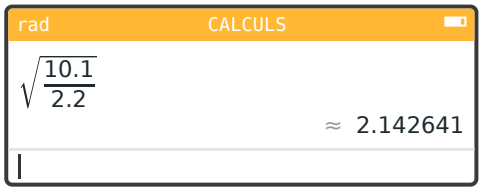
$$\frac{v_{2\ell}}{v_{1\ell}} = \sqrt{\frac{8\,\rho_{fer}\,R_2\,g}{3\,\rho_{air}\,C} \times \frac{3\,\rho_{air}\,C}{8\,\rho_{fer}\,R_1\,g}} = \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}$$

Comme $R_2 > R_1$, ce rapport est supérieur à 1 : $\sqrt{\dfrac{10{,}1}{2{,}2}} = 2{,}1$.

$\dfrac{v_{2\ell}}{v_{1\ell}} = \sqrt{\dfrac{R_2}{R_1}} > 1$: le boulet $\mathrm{B_2}$, le plus gros, a la vitesse limite la plus élevée.

COMPRENDRE
Dans un rapport, les rayons peuvent rester en centimètres : les unités se simplifient.

À LA CALCULATRICE



2.5.1 Expliquer l'attribution des courbes b et c aux boulets B_1 et B_2.

Données utiles figure 2 ; $v_{2\ell} > v_{1\ell}$ (2.4)

Sur la figure 2, les courbes (b) et (c) tendent chacune vers un palier : la vitesse limite. Le palier de (b), proche de $190\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, est plus haut que celui de (c), proche de $90\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Or B_2 a la vitesse limite la plus élevée (2.4).

La courbe (b) correspond à B_2 et la courbe (c) à B_1.

COMPRENDRE
Vérification : le rapport des paliers, $190 \div 90 \approx 2{,}1$, est bien celui prévu par $\sqrt{R_2/R_1}$. La courbe (a), sans palier, est la chute libre : $v = g\,t$.

2.5.2 La hauteur de chute est de 57 m. Déterminer graphiquement la date t_{sol} à laquelle le premier boulet touche le sol. S'agit-il de B_1 ou de B_2 ?

Données utiles figure 4 ; courbe (b') : B_2 ; courbe (c') : B_1

Un boulet touche le sol quand $x = 57{,}0$ m. Sur la figure 4, on trace l'horizontale $x = 57{,}0$ m.

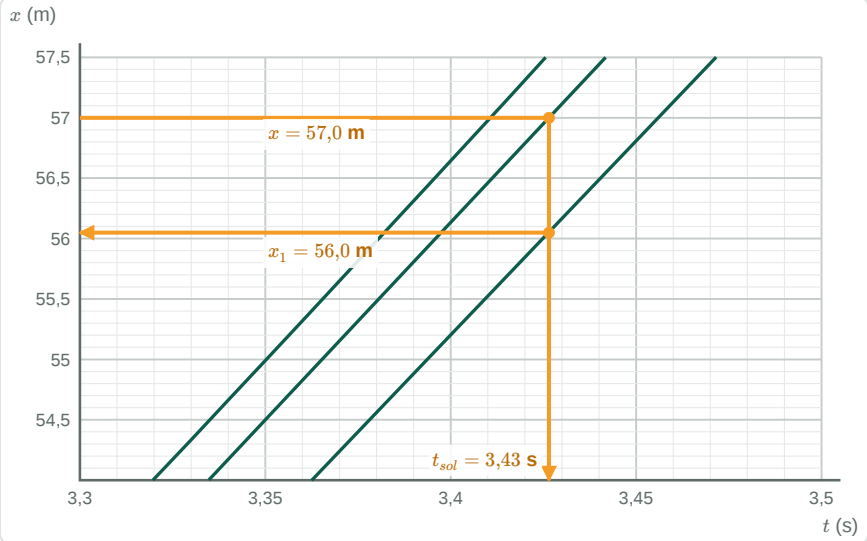
Parmi les deux chutes dans l'air, la courbe (b') atteint cette droite avant la courbe (c') : le premier boulet au sol est B_2.

L'abscisse du point d'intersection avec (b') se lit entre 3,40 s et 3,45 s, à peu près au milieu.

$t_{sol} \approx 3{,}43$ s ; le premier boulet à toucher le sol est B_2.

PIÈGE
Lire l'intersection avec la courbe (a') : c'est la chute libre, pas un boulet réel. Elle redonne d'ailleurs la durée du 1.2.2 (3,41 s avant arrondi).

MÉTHODE
Lecture précise : mesurer à la règle l'écart entre deux graduations (ici 0,05 s), puis la distance du point à la graduation précédente, et faire une proportion.



2.5.2 · Figure 4 du sujet, de gauche à droite : courbes (a'), (b'), (c'). Lecture de t_{sol} sur (b'), puis de la position de l'autre boulet sur (c')

2.5.3 À quelle distance du sol se trouve l'autre boulet à cette date ? Ce résultat est-il en accord avec l'extrait n°3 ?

Données utiles $t_{sol} \approx 3{,}43$ s (2.5.2) ; $H = 57{,}0$ m ; une coudée = 57 cm

À la date t_{sol}, on lit sur la courbe (c') la position de B_1 : $x_1 \approx 56{,}0$ m.

Distance au sol : $d = H - x_1 = 57{,}0 - 56{,}0 = 1{,}0\ \mathrm{m}$

Galilée annonce un écart de « deux doigts », donc de quelques centimètres : la simulation donne un écart bien plus grand, l'accord n'est pas quantitatif. En revanche, 1,0 m reste très petit devant les 99 coudées d'Aristote ($99 \times 0{,}57 \approx 56$ m) : sur ce point, Galilée a raison.

$d \approx 1{,}0\ \mathrm{m}$: plus que les « deux doigts » de Galilée, mais sans commune mesure avec les 99 coudées d'Aristote.

COMPRENDRE

Les deux courbes sont très proches : une erreur de lecture de 0,01 s sur t_{sol} déplace x_1 d'environ 0,3 m. Le résultat est un ordre de grandeur, d'où l'intérêt du zoom.

À LA CALCULATRICE

