Le trébuchet

Bac S 2007 La Réunion (ancien programme) · Exercice 4 **5,5 points** **Durée conseillée 1 h 05**

1 Donner les caractéristiques (sens, direction et valeur) du poids $\vec{P}$ et de la poussée d'Archimède $\vec{P}_A$ qui s'exercent sur le projectile.

Données utiles $m = 130$ kg ; $g \approx 10$ m · s^{-2} ; $\rho_{\text{air}} = 1{,}3$ kg · m^{-3} ; $V = 50$ L

Poids $\vec{P}$: direction verticale, sens vers le bas, valeur $P = m\,g = 130 \times 10 = 1{,}3 \times 10^3$ N.

Poussée d'Archimède $\vec{P}_A$: direction verticale, sens vers le haut, valeur égale au poids de l'air déplacé, $P_A = \rho_{\text{air}}\,V\,g$ avec $V = 50$ L $= 50 \times 10^{-3}$ m^3.

$P_A = 1{,}3 \times 50 \times 10^{-3} \times 10 = 0{,}65$ N

$P = 1{,}3 \times 10^3$ N (vers le bas) ; $P_A = 6{,}5 \times 10^{-1}$ N (vers le haut)

PIÈGE
Laisser le volume en litres. La masse volumique est en kg · m^{-3} : il faut V en m^3, avec 1 L $= 10^{-3}$ m^3.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme g, ρ_{air} et V. La poussée d'Archimède fait intervenir la masse volumique du fluide (l'air), pas celle du projectile.

2 Est-il judicieux de négliger par la suite la poussée d'Archimède ?

Données utiles $P = 1{,}3 \times 10^3$ N et $P_A = 6{,}5 \times 10^{-1}$ N (Q1)

On compare les deux valeurs par leur rapport :

$$\frac{P}{P_A} = \frac{1{,}3 \times 10^3}{1{,}3 \times 5{,}0 \times 10^{-1}} = \frac{10^4}{5{,}0} = 2{,}0 \times 10^3$$

$P \approx 2000\,P_A$: la poussée d'Archimède est négligeable devant le poids, il est judicieux de ne pas en tenir compte.

MÉTHODE
Pour savoir si une force est négligeable devant une autre, on calcule le rapport de leurs valeurs. Sans calculatrice, on garde les facteurs communs (ici 1,3) pour simplifier avant de calculer.

3 En appliquant la deuxième loi de Newton dans le cadre de la chute libre, déterminer les coordonnées a_x et a_z du vecteur accélération du centre d'inertie du projectile.

Système : le projectile, de masse m constante. Référentiel : terrestre, supposé galiléen.

En chute libre, la seule force exercée est le poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$.

Deuxième loi de Newton : $\vec{P} = m\,\vec{a}$, soit $m\,\vec{g} = m\,\vec{a}$, donc $\vec{a} = \vec{g}$.

Le vecteur $\vec{g}$ est vertical et dirigé vers le bas, alors que l'axe Oz est orienté vers le haut. En projetant :

$a_x = 0$ et $a_z = -g$

PIÈGE
Oublier de préciser le système et le référentiel galiléen, ou écrire $a_z = +g$ sans regarder le sens de l'axe Oz.

COMPRENDRE
Le « centre d'inertie » de l'ancien programme s'appelle aujourd'hui centre de masse. La masse se simplifie : en chute libre, le mouvement ne dépend pas de la masse du projectile.

4 Donner l'expression des coordonnées v_{0x} et v_{0z} du vecteur vitesse initiale $\vec{v}_0$ en fonction de v_0 et α.

L'angle α est mesuré entre $\vec{v}_0$ et l'horizontale. Dans le triangle rectangle formé par $\vec{v}_0$ et ses projections, le côté adjacent à α est horizontal et le côté opposé est vertical.

$v_{0x} = v_0 \cos\alpha$ et $v_{0z} = v_0 \sin\alpha$

5 Déterminer l'expression des composantes horizontale $v_x(t)$ et verticale $v_z(t)$ du vecteur vitesse du système au cours de son mouvement.

Données utiles $a_x = 0$; $a_z = -g$ (Q3) ; v_{0x} et v_{0z} (Q4)

Par définition $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$, donc $\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = 0$ et $\dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = -g$.

On cherche les primitives : $v_x(t) = C_1$ et $v_z(t) = -g\,t + C_2$, où C_1 et C_2 sont des constantes.

Condition initiale : à $t = 0$, $\vec{v} = \vec{v}_0$, d'où $C_1 = v_0 \cos\alpha$ et $C_2 = v_0 \sin\alpha$.

$$v_x(t) = v_0 \cos\alpha \text{ et } v_z(t) = -g\,t + v_0 \sin\alpha$$

MÉTHODE
De l'accélération à la vitesse : 1) écrire $\vec{a} = \mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{d}t$; 2) prendre une primitive de chaque coordonnée, avec une constante ; 3) trouver la constante grâce à la vitesse à $t = 0$.

6 En déduire la nature du mouvement du projectile en projection sur l'axe horizontal. Justifier.

Données utiles $v_x(t) = v_0 \cos\alpha$ (Q5)

La composante horizontale de la vitesse, $v_x = v_0 \cos\alpha$, ne dépend pas du temps : elle garde la même valeur pendant tout le mouvement.

En projection sur l'axe horizontal, le mouvement du projectile est **uniforme**.

COMPRENDRE
Aucune force n'agit horizontalement ($a_x = 0$), donc rien ne modifie v_x. Sur l'axe vertical au contraire, le mouvement est uniformément varié.

7 Déterminer l'expression des équations horaires du mouvement du projectile : $x(t)$ et $z(t)$.

Données utiles $v_x(t)$ et $v_z(t)$ (Q5) ; position initiale : $x = 0$, $z = H$

Par définition $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OG}}{\mathrm{d}t}$, donc $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_0 \cos\alpha$ et $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -g\,t + v_0 \sin\alpha$.

Primitives : $x(t) = (v_0 \cos\alpha)\,t + C_3$ et $z(t) = -\dfrac{1}{2}\,g\,t^2 + (v_0 \sin\alpha)\,t + C_4$.

Condition initiale : à $t = 0$, le projectile est sur l'axe Oz à la hauteur H, donc $C_3 = 0$ et $C_4 = H$.

$$x(t) = (v_0 \cos\alpha)\,t \text{ et } z(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + (v_0 \sin\alpha)\,t + H$$

PIÈGE
Oublier la constante H dans $z(t)$: le projectile ne part pas de l'origine du repère mais d'un point situé à la hauteur H au-dessus du sol.

8 Montrer que l'équation de la trajectoire du projectile est $z = -\dfrac{1}{2}\,g\,\dfrac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} + x\tan\alpha + H$.

Données utiles $x(t)$ et $z(t)$ (Q7)

On élimine le temps. De $x = (v_0 \cos\alpha)\,t$ on tire $t = \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha}$, que l'on remplace dans $z(t)$:

$$z = -\frac{1}{2}\,g\left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + v_0 \sin\alpha \times \frac{x}{v_0 \cos\alpha} + H$$

Dans le deuxième terme, v_0 se simplifie et $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$.

$$z = -\frac{1}{2}\,g\,\frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} + x\tan\alpha + H$$: c'est l'expression attendue.

MÉTHODE
Équation de la trajectoire : exprimer t en fonction de x à partir de l'équation horaire la plus simple, puis le reporter dans $z(t)$. Il ne doit plus rester de t.

9 Quelle est la nature de la trajectoire du projectile ? Représenter qualitativement son allure sur la figure 1 de l'annexe.

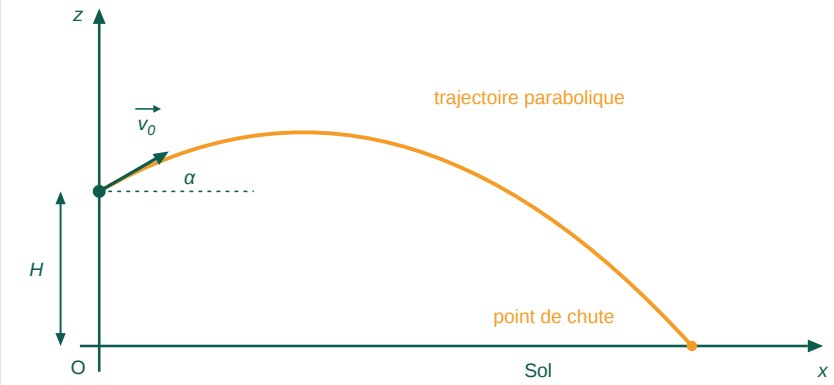
Données utiles équation de la trajectoire (Q8)

L'équation est de la forme $z = a\,x^2 + b\,x + c$, avec $a = -\dfrac{g}{2\,v_0^2\cos^2\alpha} < 0$: z est une fonction polynôme du second degré de x.

Tracé sur l'annexe : la courbe part du point de lancement à la hauteur H, est tangente à $\vec{v}_0$ en ce point, monte jusqu'à un sommet puis redescend jusqu'au sol.

La trajectoire est une portion de **parabole**, tournée vers le bas.

PIÈGE
Tracer une courbe qui part de l'origine O, ou qui ne suit pas la direction de $\vec{v}_0$ au départ. La vitesse est toujours tangente à la trajectoire.



9 · Figure 1 de l'annexe complétée : allure de la trajectoire (en orange)

10 En utilisant l'équation de la trajectoire obtenue à la question 8, indiquer les paramètres de lancement qui jouent un rôle dans le mouvement du projectile.

Données utiles équation de la trajectoire (Q8)

L'équation de la trajectoire contient g, v_0, α et H. L'intensité de la pesanteur g est fixée par le lieu, ce n'est pas un paramètre de lancement. La masse m du projectile n'apparaît pas.

Les paramètres de lancement sont la valeur v_0 de la vitesse initiale, l'angle de tir α et la hauteur de lancement H (fixée ici à 10 m par la machine).

11 Dans le cas où le projectile est lancé avec une vitesse initiale horizontale, montrer que l'abscisse de son point de chute est $x = v_0\sqrt{\dfrac{2H}{g}}$.

Données utiles équation de la trajectoire (Q8)

Vitesse initiale horizontale : $\alpha = 0$, donc $\cos\alpha = 1$ et $\tan\alpha = 0$.
L'équation de la trajectoire devient :

$$z = -\frac{1}{2}\,g\,\frac{x^2}{v_0^2} + H$$

Au point de chute, le projectile touche le sol : $z = 0$, soit $\dfrac{1}{2}\,g\,\dfrac{x^2}{v_0^2} = H$, donc $x^2 = \dfrac{2\,H\,v_0^2}{g}$.

Comme $x > 0$ (le projectile avance dans le sens de l'axe Ox) :

$x = v_0\sqrt{\dfrac{2H}{g}}$: c'est l'expression attendue.

COMPRENDRE
$\sqrt{2H/g}$ est la durée de la chute depuis la hauteur H ; pendant cette durée, le projectile avance horizontalement à la vitesse constante v_0 .

12 Avec quelle vitesse initiale horizontale v_0 le projectile doit-il être lancé pour atteindre la base du mur du château situé à une distance $x = 100$ m ?

Données utiles $x = 100$ m ; $H = 10$ m ; $g \approx 10\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$; aide au calcul : $\sqrt{0{,}5} = 7{,}1 \times 10^{-1}$

On isole v_0 dans la relation de la question 11 :

$$v_0 = x\sqrt{\frac{g}{2H}}$$

$$v_0 = 100 \times \sqrt{\frac{10}{2 \times 10}} = 100 \times \sqrt{0{,}5} = 100 \times 7{,}1 \times 10^{-1}$$

$$\boxed{v_0 = 71\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

PIÈGE

Inverser la fraction sous la racine en isolant v_0. Vérification par les unités : g/H est en s^{-2}, sa racine en s^{-1}, et le produit par x donne bien des $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

COMPRENDRE

La calculatrice est interdite : l'aide au calcul indique la forme à faire apparaître, ici $\sqrt{0{,}5}$. Cette vitesse correspond à environ $260\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$.