Pendule élastique

Bac S 2008 La Réunion (ancien programme) · Exercice 3 **4 points** **Durée conseillée 52 min**

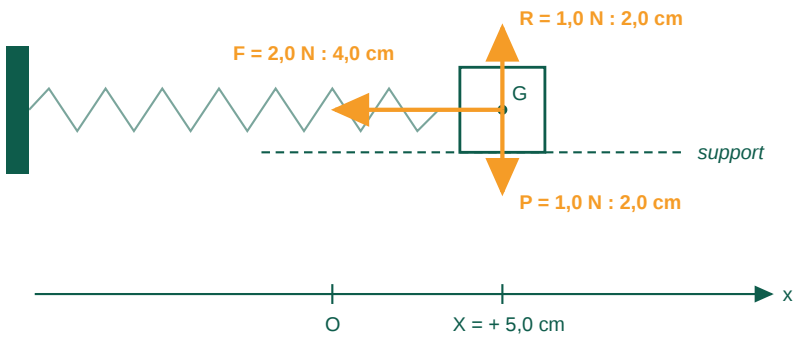
1 Faire l'inventaire des forces extérieures appliquées au solide juste après le lâcher et les représenter sur la figure 2, à l'échelle 1 cm pour 0,5 N.

Données utiles $K = 40\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}$; $m = 100\ \text{g} = 0{,}100\ \text{kg}$; $g = 10\ \text{N}\cdot\text{kg}^{-1}$; $X = +5{,}0\ \text{cm} = 5{,}0\times10^{-2}\ \text{m}$

Système {solide}, référentiel terrestre supposé galiléen. Trois forces extérieures :

- le poids $\vec{P}$, vertical, vers le bas : $P = m\,g = 0{,}100\times10 = 1{,}0\ \text{N}$, soit une flèche de 2,0 cm ;
- la réaction $\vec{R}$ du support, verticale et vers le haut (pas de frottement) ; le solide ne bouge pas verticalement, donc $R = P = 1{,}0\ \text{N}$: flèche de 2,0 cm ;
- la force de rappel $\vec{F}$ du ressort étiré, horizontale, dirigée vers la gauche (vers O) : $F = K\,X = 40\times5{,}0\times10^{-2} = 2{,}0\ \text{N}$, soit une flèche de 4,0 cm.

$P = R = 1{,}0\ \text{N}$ (2,0 cm chacune) ; $F = 2{,}0\ \text{N}$ (4,0 cm, vers la gauche)



1 · Figure 2 complétée : les trois forces juste après le lâcher (1 cm pour 0,5 N)

PIÈGE
Laisser m en grammes ou X en centimètres : on trouverait $P = 1000$ et $F = 200$. Le sujet exige les unités S.I. : kilogramme et mètre.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme K, g et X. Le ressort est allongé : il tire le solide vers sa position d'équilibre, d'où le sens de $\vec{F}$, opposé à l'écart.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

0.100×10 ≈ 1

$40 \times 5.0 \times 10^{-2}$ ≈ 2

2.1 Montrer que $X(t) = X_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$ est solution de l'équation différentielle $\ddot{X} + \frac{K}{m}X = 0$, à condition d'exprimer T_0 en fonction de K et m.

On dérive deux fois la fonction proposée :

$\dot{X}(t) = -X_m \frac{2\pi}{T_0} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$ puis $\ddot{X}(t) = -X_m \frac{4\pi^2}{T_0^2} \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right) = -\frac{4\pi^2}{T_0^2}X(t)$

On remplace dans l'équation différentielle :

$$-\frac{4\pi^2}{T_0^2}X(t) + \frac{K}{m}X(t) = 0 \quad \text{soit} \quad \left(\frac{K}{m} - \frac{4\pi^2}{T_0^2}\right)X(t) = 0$$

L'égalité doit être vraie à chaque instant, alors que $X(t)$ n'est pas toujours nul : il faut $\frac{4\pi^2}{T_0^2} = \frac{K}{m}$, donc $T_0^2 = 4\pi^2 \frac{m}{K}$.

La fonction est solution si $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$ (on garde la valeur positive).

PIÈGE
Oublier le facteur $\frac{2\pi}{T_0}$ qui sort à chaque dérivation : il apparaît au carré dans $\ddot{X}$, et c'est lui qui donne la période.

COMPRENDRE
L'oscillateur masse-ressort et son équation différentielle ne figurent plus au programme actuel de spécialité. L'exercice reste un bon entraînement : bilan des forces, dérivation, énergie mécanique.

MÉTHODE
Pour vérifier qu'une fonction est solution : 1) la dériver autant de fois que nécessaire ; 2) la reporter dans l'équation ; 3) chercher la condition qui rend l'égalité vraie pour tout t.

2.2 En utilisant les conditions initiales, donner la valeur de X_m.

À $t = 0$, l'expression donne $X(0) = X_m \cos(0) = X_m$.

Or le solide est lâché depuis l'abscisse $X(0) = +5{,}0$ cm.

$X_m = 5{,}0 \times 10^{-2}$ m

COMPRENDRE
X_m est l'amplitude : le solide oscille entre $-X_m$ et $+X_m$. La vitesse initiale nulle est bien respectée, car $\dot{X}(0)$ contient $\sin(0) = 0$.

3.1 En utilisant les valeurs de m et de K, calculer la valeur de T_0.

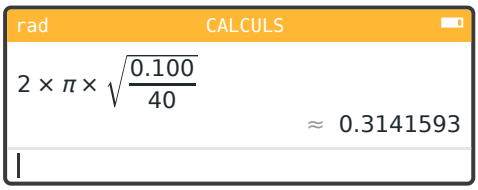
Données utiles $m = 0{,}100$ kg ; $K = 40$ N · m^{-1} ; expression de T_0 (Q2.1)

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}100}{40}} = 0{,}31 \text{ s}$$

$T_0 = 0{,}31$ s

PIÈGE
Avec $m = 100$ (en grammes), on obtient $9{,}9$ s : une valeur sans rapport avec l'enregistrement, où l'on compte trois oscillations en moins d'une seconde.

À LA CALCULATRICE



3.2 Cette valeur est-elle en accord avec celle que l'on peut déduire de la courbe de la figure 3 ?

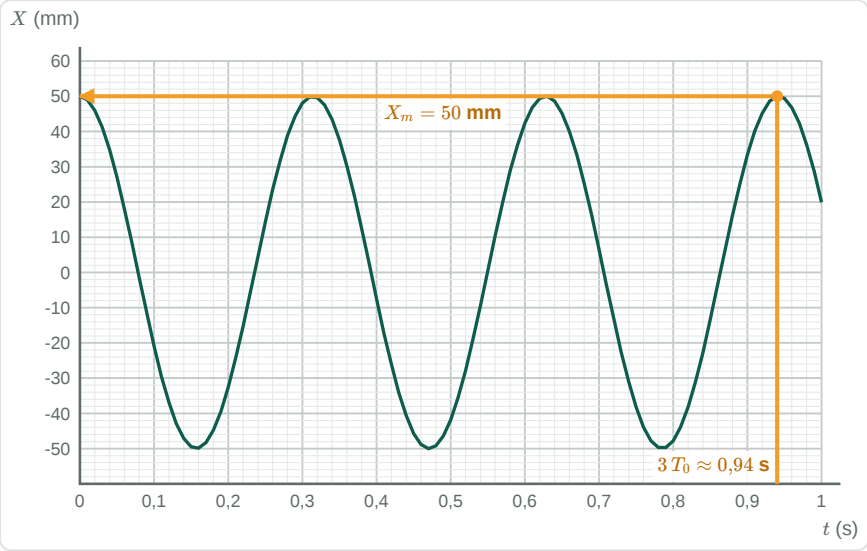
Données utiles figure 3 : X (en mm) en fonction de t (en s) ; $T_0 = 0{,}31$ s (Q3.1)

Sur la figure 3, la courbe part d'un maximum à $t = 0$ et atteint son quatrième maximum vers $t = 0{,}94$ s : cette durée correspond à trois périodes.

$T_0 = \frac{0{,}94}{3} = 0{,}31$ s

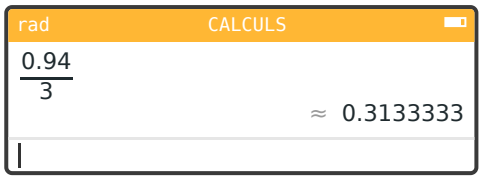
La lecture graphique donne $T_0 \approx 0{,}31$ s : accord avec la valeur calculée.

MÉTHODE
Mesurer plusieurs périodes puis diviser : l'erreur de lecture est répartie sur le nombre de périodes, le résultat est plus précis qu'avec une seule.



3.2 · Figure 3 : trois périodes entre t = 0 et t ≈ 0,94 s

À LA CALCULATRICE



4.1 Donner l'expression de l'énergie mécanique totale E_m en fonction de X, v, m et K. Nommer les deux termes de cette expression.

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} K X^2$$

- $\frac{1}{2} m v^2$: énergie cinétique du solide ;
- $\frac{1}{2} K X^2$: énergie potentielle élastique du ressort.

COMPRENDRE
Le mouvement est horizontal : l'altitude de G ne change pas, l'énergie potentielle de pesanteur est constante et on peut la prendre nulle.

4.2 Calculer E_m à l'instant initial $t = 0$.

Données utiles $K = 40\ \text{N} \cdot \text{m}^{-1}$; $X_m = 5{,}0 \times 10^{-2}\ \text{m}$ (Q2.2)

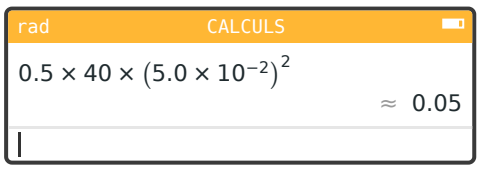
À $t = 0$, le solide est lâché sans vitesse ($v = 0$) depuis $X = X_m$: l'énergie est entièrement potentielle élastique.

$$E_m = \frac{1}{2} K X_m^2 = \frac{1}{2} \times 40 \times (5{,}0 \times 10^{-2})^2 = 5{,}0 \times 10^{-2}\ \text{J}$$

$$E_m = 5{,}0 \times 10^{-2}\ \text{J}$$

PIÈGE
Oublier le carré sur X_m, ou laisser X_m en centimètres : on obtiendrait 500 au lieu de $5{,}0 \times 10^{-2}$ J.

À LA CALCULATRICE



4.3 En déduire la valeur de la vitesse v lors du passage de G par la position d'équilibre.

Données utiles $E_m = 5{,}0 \times 10^{-2}$ J (Q4.2) ; $m = 0{,}100\ \text{kg}$

Les frottements sont négligés : l'énergie mécanique se conserve.

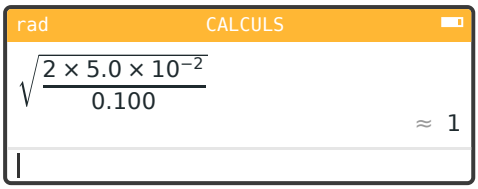
À la position d'équilibre, $X = 0$: l'énergie potentielle élastique est nulle, donc $E_m = \frac{1}{2} m v^2$.

$$v = \sqrt{\frac{2\,E_m}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 5{,}0 \times 10^{-2}}{0{,}100}} = 1{,}0\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v = 1{,}0\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

COMPRENDRE
C'est la vitesse maximale du solide : toute l'énergie est alors cinétique. Aux extrémités ($X = \pm X_m$), c'est l'inverse, la vitesse s'annule.

À LA CALCULATRICE



5.1 Quel est l'intérêt pratique d'utiliser deux ressorts au lieu d'un ?

Tenu des deux côtés par des ressorts qui restent tendus, le mobile est guidé : il oscille le long de l'axe des ressorts sans s'en écarter ni pivoter.

Un ressort seul devrait aussi travailler en compression, où il a tendance à fléchir sur le côté.

Deux ressorts maintiennent le mobile sur l'axe : le mouvement reste rectiligne.

5.2 En utilisant le graphique de la figure 5, montrer que K_{eq} vérifie la relation $K_{eq} = K_1 + K_2$.

Données utiles $K_1 = 10\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}$; $K_2 = 20\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}$; $m = 0{,}100\ \text{kg}$; figure 5

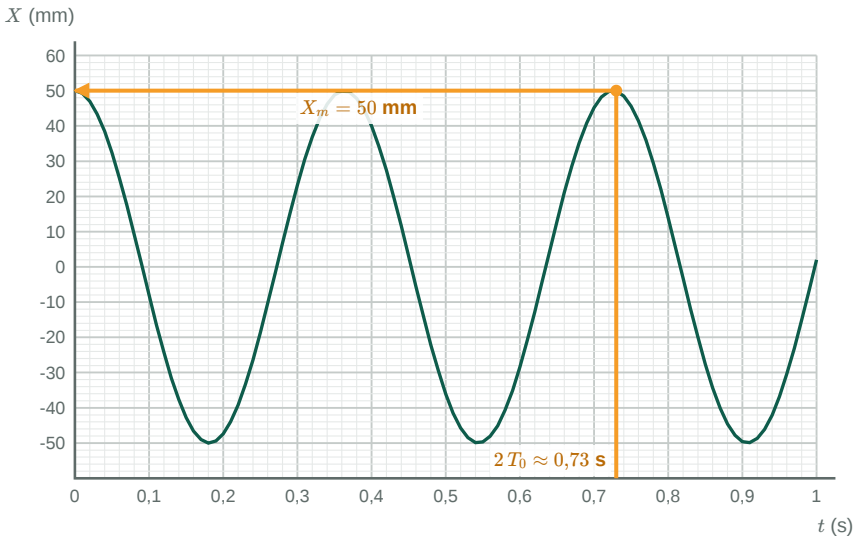
Sur la figure 5, le troisième maximum est atteint vers $t = 0{,}73$ s, soit deux périodes : $T_0 = \dfrac{0{,}73}{2} = 0{,}365$ s.

Le système équivaut à un seul ressort de raideur K_{eq} : $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{K_{eq}}}$, donc

$$K_{eq} = \frac{4\pi^2\, m}{T_0^2} = \frac{4\pi^2 \times 0{,}100}{0{,}365^2} \approx 30\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}$$

Par ailleurs : $K_1 + K_2 = 10 + 20 = 30\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}$.

$K_{eq} \approx 30\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1} = K_1 + K_2$: la relation est vérifiée.

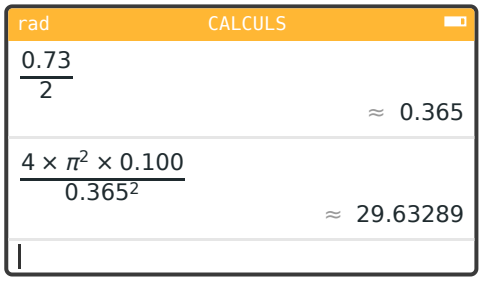


5.2 · Figure 5 : deux périodes entre t = 0 et t ≈ 0,73 s

COMPRENDRE

T_0 est au carré : une lecture à 0,01 s près change K_{eq} d'environ 5 %. Le résultat de la lecture graphique ne se donne donc qu'avec deux chiffres significatifs.

À LA CALCULATRICE



6 Proposer une méthode permettant de déterminer la valeur d'une masse en état d'impesanteur.

En impesanteur, une balance ne sert à rien. En revanche, la période $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$ d'un pendule élastique ne dépend pas de g.

Méthode : fixer l'objet à un ressort (ou entre deux ressorts) de raideur K connue, le faire osciller, chronométrer plusieurs oscillations pour obtenir T_0, puis calculer la masse.

$$m = \frac{K\,T_0^2}{4\pi^2}$$, avec K connue et T_0 mesurée.

COMPRENDRE

C'est ainsi que les astronautes se « pèsent » dans une station spatiale : un siège monté sur ressorts oscille, et sa période donne la masse de l'ensemble.