Pile et charge d'un condensateur

Bac S 2008 La Réunion (ancien programme) · Exercice 2 **8 points** **Durée conseillée 1 h 44**

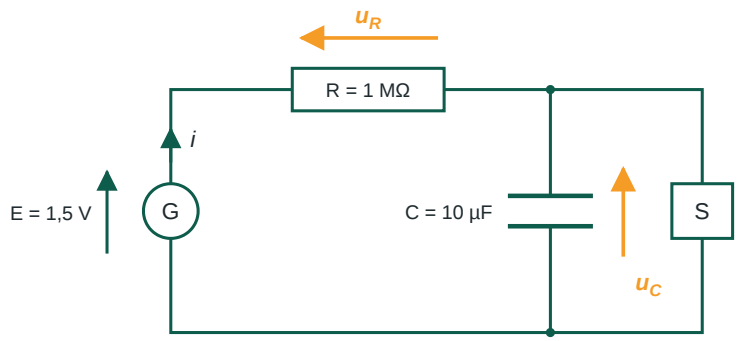
1 Tracer sur la figure 1 de l'annexe les flèches-tension correspondant à u_R et à u_C, en convention récepteur.

En convention récepteur, la flèche-tension d'un dipôle est de sens opposé à la flèche du courant qui le traverse.

Le courant i traverse le conducteur ohmique de la gauche vers la droite, puis le condensateur du haut vers le bas.

La flèche u_R pointe vers la gauche (vers la borne par laquelle i entre dans R) ; la flèche u_C pointe vers le haut (vers l'armature supérieure).

PIÈGE
Dessiner les flèches-tension dans le sens de i : c'est la convention générateur. Les relations $u_R = R\,i$ et $i = C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ changeraient alors de signe.



1 · Figure 1 de l'annexe complétée : en convention récepteur, chaque flèche-tension est opposée au sens de i

2 Établir l'équation différentielle vérifiée par u_C lors de la charge du condensateur, entre $t = 0$ et $t = t_f$.

Pendant la charge, le système S se comporte comme un interrupteur ouvert : le circuit se réduit à la pile, au conducteur ohmique et au condensateur en série.

Loi des mailles : $E = u_R + u_C$.

Loi d'Ohm : $u_R = R\,i$.

Pour le condensateur, $q = C\,u_C$ et $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$, donc $i = C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ puisque C est constante.

On remplace dans la loi des mailles :

$$R\,C\,\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = E$$

MÉTHODE
Circuit RC : 1) loi des mailles ; 2) loi d'Ohm pour u_R ; 3) $i = C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$; 4) on remplace pour ne garder que u_C et sa dérivée.

3 Quelle serait la valeur maximale prise par la tension u_C en l'absence du système S ?

Données utiles $E = 1{,}5$ V

Sans le système S, la charge irait à son terme. Le condensateur chargé, u_C ne varie plus : $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = 0$.

L'équation différentielle devient alors $u_C = E$.

$u_{C,\max} = E = 1{,}5$ V

COMPRENDRE
Condensateur chargé, plus aucun courant ne circule : $u_R = R\,i = 0$, toute la tension de la pile se retrouve aux bornes du condensateur.

4.1 Préciser l'expression de τ et donner son nom.

$\tau = RC$: cette grandeur s'appelle la constante de temps du dipôle RC.

COMPRENDRE
On le vérifie en dérivant : $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \dfrac{E}{\tau}\,e^{-t/\tau}$.
L'équation de la question 2 donne $E\,e^{-t/\tau}\left(\dfrac{RC}{\tau} - 1\right) = 0$ à tout instant, ce qui impose $\tau = RC$.

4.2 Montrer que l'expression de τ est homogène à un temps.

Loi d'Ohm : $R = \dfrac{u_R}{i}$, donc R s'exprime en $\mathrm{V \cdot A^{-1}}$.

Relation du condensateur : $i = C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$, donc $C = \dfrac{i}{\mathrm{d}u_C/\mathrm{d}t}$ s'exprime en $\mathrm{A \cdot s \cdot V^{-1}}$.

Le produit RC s'exprime en $\mathrm{V \cdot A^{-1} \cdot A \cdot s \cdot V^{-1}} = \mathrm{s}$.

$\tau = RC$ s'exprime en secondes : cette grandeur est homogène à un temps.

MÉTHODE
Pour une analyse dimensionnelle, ramener chaque grandeur à des unités simples à l'aide d'une relation connue : ici la loi d'Ohm pour R et $i = C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ pour C.

4.3 Calculer la valeur de τ.

Données utiles $R = 1{,}0\ \mathrm{M\Omega}$; $C = 10\ \mu\mathrm{F}$

$\tau = RC$ avec $R = 1{,}0 \times 10^6\ \Omega$ et $C = 10 \times 10^{-6}$ F.

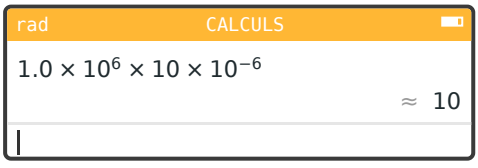
$$\tau = 1{,}0 \times 10^6 \times 10 \times 10^{-6}$$

$\tau = 10$ s

PIÈGE
Laisser R en mégaohms ou C en microfarads : τ ne sort en secondes que si R est en ohms et C en farads.

COMPRENDRE
Chiffres significatifs : R et C sont données avec deux chiffres, le résultat en garde deux. Il en sera de même dans tout l'exercice.

À LA CALCULATRICE



4.4 Déterminer graphiquement la valeur de τ à l'aide de la figure 2 de l'annexe, complétée par les constructions nécessaires.

Données utiles $E = 1{,}5$ V ; figure 2

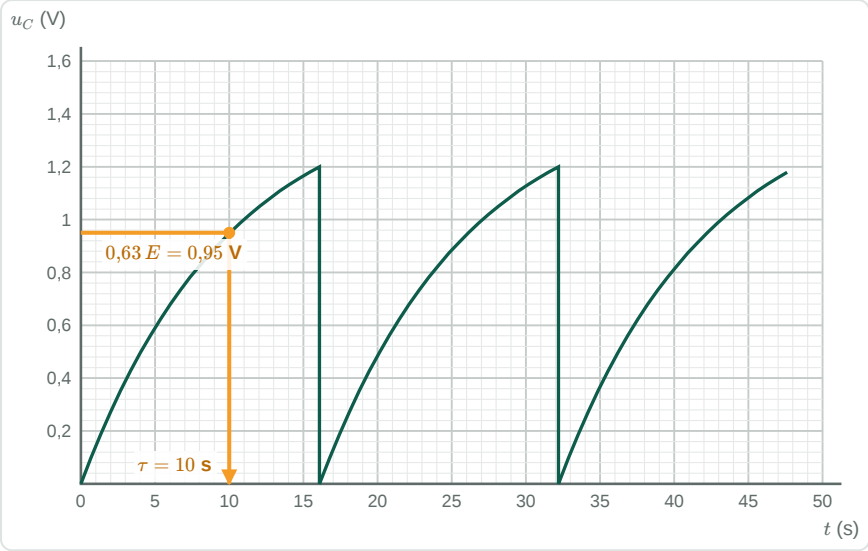
À la date $t = \tau$: $u_C(\tau) = E\,(1 - e^{-1}) = 0{,}63\,E$.

$u_C(\tau) = 0{,}63 \times 1{,}5 = 0{,}95$ V.

Sur la première charge de la figure 2, on trace l'horizontale d'ordonnée $0{,}95$ V jusqu'à la courbe, puis la verticale jusqu'à l'axe des dates.

On lit $\tau \approx 10$ s, en accord avec la valeur calculée à la question 4.3.

PIÈGE
Prendre 63 % de la tension maximale lue sur la courbe (1,2 V) : la charge est interrompue avant son terme, le pourcentage s'applique à $E = 1{,}5$ V.



4.4 · Figure 2 de l'annexe complétée : lecture de τ à $0{,}63\,E$

MÉTHODE

Autre construction possible : la tangente à l'origine coupe l'asymptote $u_C = E$ à la date $t = \tau$. Elle est moins précise, car le tracé d'une tangente est délicat.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$1 - e^{-1} \approx 0.6321206$

$0.63 \times 1.5 \approx 0.945$

5.1 À partir de la solution donnée à la question 4, établir l'expression littérale de t en fonction de E, u_C et τ.

$u_C = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$ donc $\dfrac{u_C}{E} = 1 - e^{-t/\tau}$, soit $e^{-t/\tau} = 1 - \dfrac{u_C}{E} = \dfrac{E - u_C}{E}$.

On prend le logarithme népérien : $-\dfrac{t}{\tau} = \ln\left(\dfrac{E - u_C}{E}\right)$.

$$t = -\tau \ln\left(\frac{E - u_C}{E}\right) = \tau \ln\left(\frac{E}{E - u_C}\right)$$

MÉTHODE

Pour extraire t d'une exponentielle : isoler l'exponentielle seule dans un membre, puis appliquer $\ln$ aux deux membres. On utilise ensuite $-\ln(a) = \ln(1/a)$.

5.2 Calculer la valeur de t_f et vérifier l'accord avec la figure 2 de l'annexe.

Données utiles $E = 1{,}5$ V ; $u_C(t_f) = 1{,}2$ V ; $\tau = 10$ s (4.3)

À la date t_f, la tension vaut $u_C = 1{,}2$ V :

$$t_f = \tau \ln\left(\frac{E}{E - u_C}\right) = 10 \times \ln\left(\frac{1{,}5}{1{,}5 - 1{,}2}\right) = 10 \times \ln(5{,}0)$$

Sur la figure 2, la tension atteint $1{,}2$ V puis retombe brutalement à zéro à la date 16 s environ, juste après la graduation 15 s.

$t_f = 16$ s : la valeur calculée est en accord avec la figure 2.

PIÈGE

Oublier les parenthèses autour de $1{,}5 - 1{,}2$ à la calculatrice : on obtiendrait le logarithme d'un nombre négatif.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$10 \times \ln\left(\dfrac{1.5}{1.5 - 1.2}\right) \approx 16.09438$

5.3 En déduire la fréquence du phénomène périodique.

Données utiles $t_f = 16$ s (5.2)

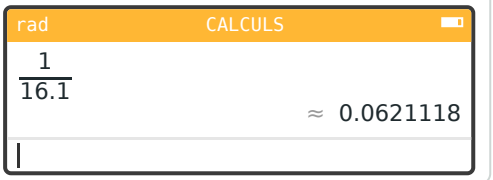
La décharge est de durée négligeable : la période du phénomène est la durée d'une charge, $T = t_f$.

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{t_f} = \frac{1}{16{,}1}$$

$\boxed{f = 6{,}2 \times 10^{-2} \text{ Hz}}$

COMPRENDRE
On calcule avec la valeur non arrondie $t_f = 16{,}1$ s. Avec 16 s, on trouve $6{,}3 \times 10^{-2}$ Hz : cet écart d'une unité sur le dernier chiffre, dû à l'arrondi, est accepté.

À LA CALCULATRICE



6.1 Établir l'expression littérale de i à partir de l'expression de u_C donnée à la question 4.

$i = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ avec $u_C = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$.

$\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = E \times \dfrac{1}{\tau}e^{-t/\tau}$, donc $i = \dfrac{C\,E}{\tau}e^{-t/\tau}$.

Comme $\tau = RC$:

$\boxed{i(t) = \dfrac{E}{R}e^{-t/\tau}}$

PIÈGE
Erreur de signe en dérivant : la dérivée de $e^{-t/\tau}$ est $-\dfrac{1}{\tau}e^{-t/\tau}$, et le signe « − » placé devant l'exponentielle dans u_C rend le résultat positif.

COMPRENDRE
Même résultat sans dériver, avec la loi des mailles : $i = \dfrac{u_R}{R} = \dfrac{E - u_C}{R}$. L'intensité décroît pendant que u_C augmente.

6.2 Calculer les valeurs de i aux dates $t = 0$ et $t = t_f$.

Données utiles $E = 1{,}5$ V ; $R = 1{,}0 \times 10^6\ \Omega$; $\tau = 10$ s (4.3) ; $t_f = 16{,}1$ s (5.2)

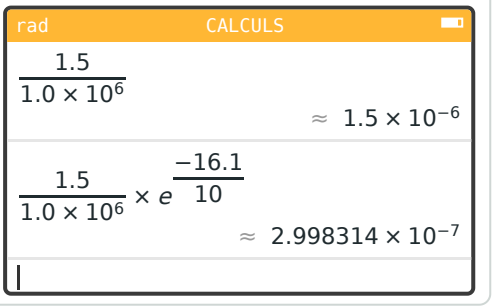
À $t = 0$: $i(0) = \dfrac{E}{R}e^0 = \dfrac{E}{R} = \dfrac{1{,}5}{1{,}0 \times 10^6} = 1{,}5 \times 10^{-6}$ A.

À $t = t_f$: $i(t_f) = \dfrac{E}{R}e^{-t_f/\tau} = \dfrac{1{,}5}{1{,}0 \times 10^6} \times e^{-16{,}1/10} = 3{,}0 \times 10^{-7}$ A.

$\boxed{i(0) = 1{,}5\ \mu\text{A} \text{ et } i(t_f) = 0{,}30\ \mu\text{A}}$

COMPRENDRE
Vérification rapide : $i(t_f) = \dfrac{E - u_C(t_f)}{R} = \dfrac{1{,}5 - 1{,}2}{1{,}0 \times 10^6} = 3{,}0 \times 10^{-7}$ A.

À LA CALCULATRICE



7.1 Rappeler l'expression de l'énergie $E_{\text{élec}}$ en fonction de C et de u_C. Préciser les unités des grandeurs utilisées.

$\boxed{E_{\text{élec}} = \dfrac{1}{2}C\,u_C^2}$, avec $E_{\text{élec}}$ en joules (J), C en farads (F) et u_C en volts (V).

7.2 Déterminer la valeur de cette énergie à la date t_f.

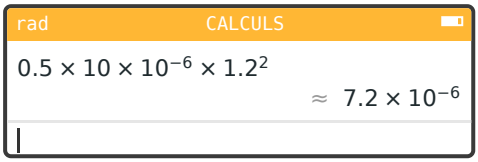
Données utiles $C = 10 \times 10^{-6}$ F ; $u_C(t_f) = 1{,}2$ V

$$E_{\text{élec}}(t_f) = \frac{1}{2} C\, u_C(t_f)^2 = \frac{1}{2} \times 10 \times 10^{-6} \times 1{,}2^2$$

$E_{\text{élec}}(t_f) = 7{,}2 \times 10^{-6}$ J $= 7{,}2$ μJ

PIÈGE
Oublier le carré sur la tension, ou utiliser $E = 1{,}5$ V : à la date t_f, le condensateur n'est chargé que sous 1,2 V.

À LA CALCULATRICE



7.3 Sur la durée d'un cycle, l'énergie électrique totale délivrée par la pile vaut $E_G = 18$ μJ. Comment expliquer la différence entre les valeurs de E_G et de $E_{\text{élec}}$?

Données utiles $E_G = 18$ μJ ; $E_{\text{élec}}(t_f) = 7{,}2$ μJ (7.2)

$E_G > E_{\text{élec}}(t_f)$: le condensateur n'emmagasine qu'une partie de l'énergie fournie par la pile.

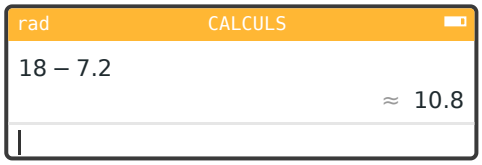
Pendant la charge, le courant traverse le conducteur ohmique, qui dissipe de l'énergie par effet Joule (transfert thermique vers l'extérieur).

Énergie dissipée : $E_G - E_{\text{élec}}(t_f) = 18 - 7{,}2 = 10{,}8$ μJ.

La différence, environ 11 μJ, est l'énergie dissipée par effet Joule dans le conducteur ohmique pendant la charge.

COMPRENDRE
La valeur de E_G se retrouve : la pile fait circuler la charge $q = C\, u_C(t_f)$ sous la tension E, soit $E_G = C\, u_C(t_f)\, E = 18$ μJ.

À LA CALCULATRICE



8.1 Écrire les équations de dissolution dans l'eau des deux solides ioniques ayant permis de réaliser les deux solutions électrolytiques.

Les solutions sont obtenues en dissolvant du nitrate de zinc $Zn(NO_3)_2\,(s)$ et du nitrate d'argent $AgNO_3\,(s)$; chaque solide se dissocie en ses ions.

$Zn(NO_3)_2\,(s) \longrightarrow Zn^{2+}\,(aq) + 2\,NO_3^-\,(aq)$ et
$AgNO_3\,(s) \longrightarrow Ag^+\,(aq) + NO_3^-\,(aq)$

PIÈGE
Écrire $ZnNO_3$: le solide est électriquement neutre, il faut deux ions nitrate NO_3^- pour un ion Zn^{2+}.

8.2 En déduire les concentrations initiales de tous les ions présents dans chacune de ces solutions aqueuses.

Données utiles $C_0 = 0{,}100$ mol · L^{-1}

D'après les équations de dissolution, supposées totales :

Solution de nitrate de zinc : une mole de solide libère une mole d'ions zinc et deux moles d'ions nitrate.

$[Zn^{2+}]_i = C_0 = 0{,}100$ mol · L^{-1} et $[NO_3^-]_i = 2\,C_0 = 0{,}200$ mol · L^{-1}.

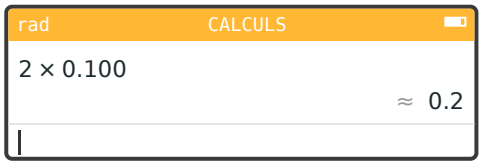
Solution de nitrate d'argent : une mole de solide libère une mole d'ions argent et une mole d'ions nitrate.

$[Ag^+]_i = [NO_3^-]_i = C_0 = 0{,}100$ mol · L^{-1}.

Demi-pile au zinc : $[Zn^{2+}]_i = 0{,}100$ mol · L^{-1}, $[NO_3^-]_i = 0{,}200$ mol · L^{-1} ; demi-pile à l'argent : $[Ag^+]_i = [NO_3^-]_i = 0{,}100$ mol · L^{-1}

COMPRENDRE
On vérifie l'électroneutralité de chaque solution : $2\,[Zn^{2+}]_i = [NO_3^-]_i$ dans la première, $[Ag^+]_i = [NO_3^-]_i$ dans la seconde.

À LA CALCULATRICE



9.1 Écrire la demi-équation associée à chaque couple oxydant-réducteur.

Pour chaque couple, l'oxydant capte des électrons pour donner le réducteur ; on équilibre les charges avec les électrons.

$\mathrm{Zn^{2+}\,(aq) + 2\,e^- = Zn\,(s)}$ et $\mathrm{Ag^+\,(aq) + e^- = Ag\,(s)}$

9.2 Parmi les deux réactions pouvant se produire a priori lors du fonctionnement de la pile, écrire celle pour laquelle le métal argent intervient en tant que réactif.

Si l'argent métallique est un réactif, il est oxydé, et l'oxydant de l'autre couple, $\mathrm{Zn^{2+}}$, est réduit :

$\mathrm{Ag\,(s) = Ag^+\,(aq) + e^-}$ (à multiplier par 2)

$\mathrm{Zn^{2+}\,(aq) + 2\,e^- = Zn\,(s)}$

On additionne, de façon que les électrons disparaissent :

$\mathrm{Zn^{2+}\,(aq) + 2\,Ag\,(s) = Zn\,(s) + 2\,Ag^+\,(aq)}$

PIÈGE
Ne pas multiplier la demi-équation de l'argent par 2 : il doit y avoir autant d'électrons cédés que d'électrons captés, et aucun électron dans l'équation finale.

10.1 Calculer le quotient de réaction initial $Q_{r,i}$ de la réaction écrite à la question 9.2 et prévoir le sens d'évolution spontanée du système chimique constituant la pile.

Données utiles $[\mathrm{Ag^+}]_i = [\mathrm{Zn^{2+}}]_i = 0{,}100\ \mathrm{mol\cdot L^{-1}}$ (8.2) ; $K = 10^{-52}$

Les solides n'interviennent pas dans le quotient de réaction :

$$Q_{r,i} = \frac{[\mathrm{Ag^+}]_i^2}{[\mathrm{Zn^{2+}}]_i} = \frac{0{,}100^2}{0{,}100} = 0{,}100$$

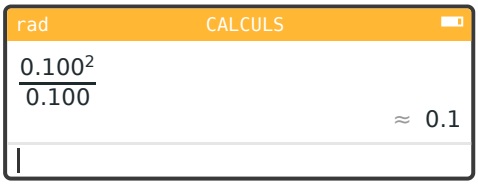
$Q_{r,i} = 0{,}100$ est très supérieur à $K = 10^{-52}$: le quotient de réaction doit diminuer pour tendre vers K.

$Q_{r,i} = 0{,}100 > K$: le système évolue spontanément dans le sens inverse de l'équation écrite à la question 9.2.

PIÈGE
Oublier l'exposant 2 sur $[\mathrm{Ag^+}]$ (nombre stœchiométrique), ou faire figurer les métaux solides dans Q_r.

MÉTHODE
Critère d'évolution : si $Q_{r,i} < K$, évolution en sens direct ; si $Q_{r,i} > K$, évolution en sens inverse ; si $Q_{r,i} = K$, le système est à l'équilibre.

À LA CALCULATRICE



10.2 Écrire l'équation de la réaction dans le sens où elle évolue spontanément.

On inverse l'équation de la question 9.2 :

$\mathrm{Zn\,(s) + 2\,Ag^+\,(aq) \longrightarrow Zn^{2+}\,(aq) + 2\,Ag\,(s)}$

COMPRENDRE
Écrite dans ce sens, la réaction a pour constante $K' = \frac{1}{K} = 10^{52}$ et pour quotient initial $\frac{1}{0{,}100} = 10{,}0$, très inférieur à K' : le sens direct est confirmé.

10.3 Rappeler les définitions d'un oxydant et d'un réducteur, et les identifier dans la transformation spontanée observée.

Oxydant : espèce susceptible de gagner un ou plusieurs électrons.

Réducteur : espèce susceptible de perdre un ou plusieurs électrons.

Dans la transformation spontanée : $\mathrm{Zn\,(s)} \longrightarrow \mathrm{Zn^{2+}\,(aq)} + 2\,\mathrm{e^-}$, le zinc cède des électrons ; $\mathrm{Ag^+\,(aq)} + \mathrm{e^-} \longrightarrow \mathrm{Ag\,(s)}$, l'ion argent en capte.

L'oxydant est l'ion argent $\mathrm{Ag^+\,(aq)}$; le réducteur est le métal zinc $\mathrm{Zn\,(s)}$.

PIÈGE
Citer les produits $\mathrm{Zn^{2+}}$ et Ag : l'oxydant et le réducteur qui réagissent sont les réactifs de la transformation.

10.4 En déduire, en le justifiant, les polarités des électrodes.

À l'électrode de zinc, l'oxydation $\mathrm{Zn\,(s)} \longrightarrow \mathrm{Zn^{2+}\,(aq)} + 2\,\mathrm{e^-}$ libère des électrons, qui partent dans le circuit extérieur : cette électrode est le pôle négatif.

À l'électrode d'argent, la réduction $\mathrm{Ag^+\,(aq)} + \mathrm{e^-} \longrightarrow \mathrm{Ag\,(s)}$ consomme des électrons, qui arrivent par le circuit extérieur : cette électrode est le pôle positif.

Électrode de zinc : pôle $-$ (anode) ; électrode d'argent : pôle $+$ (cathode).

MÉTHODE
Dans une pile, les électrons sortent par le pôle négatif. L'électrode où a lieu l'oxydation (anode) est donc le pôle $-$, celle où a lieu la réduction (cathode) le pôle $+$.

10.5 Comment est assurée l'électroneutralité des solutions lors du fonctionnement de la pile ?

L'électroneutralité est assurée par le pont salin, grâce au déplacement des ions qu'il contient.

Dans la demi-pile au zinc, il se forme des cations $\mathrm{Zn^{2+}}$: des anions du pont salin y migrent pour compenser cet apport de charges positives.

Dans la demi-pile à l'argent, des cations $\mathrm{Ag^+}$ disparaissent : des cations du pont salin y migrent pour les remplacer.

Le pont salin apporte des anions du côté du zinc et des cations du côté de l'argent ; il ferme aussi le circuit électrique.

PIÈGE
Faire passer des électrons dans le pont salin ou dans les solutions : les électrons ne circulent que dans les métaux, le courant y est porté par les ions.

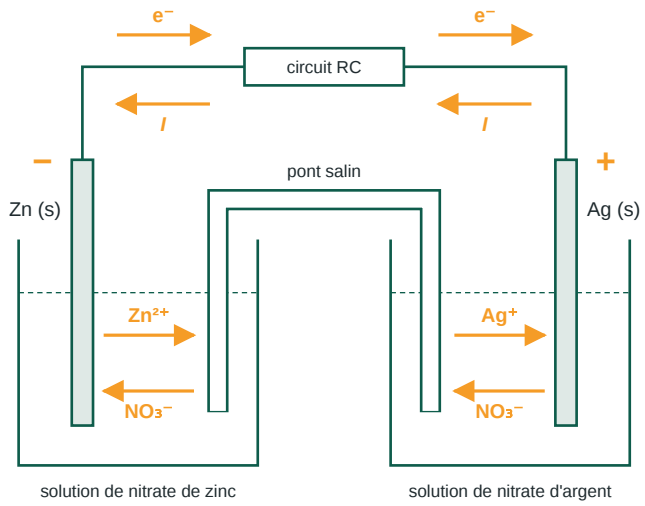
11 Faire un schéma complet et clair de cette pile en fonctionnement : espèces chimiques concernées, polarités, sens du courant et sens de déplacement de tous les porteurs de charge (hors pont salin).

Le schéma comporte : les deux demi-piles reliées par le pont salin, la lame de zinc (pôle $-$) et la lame d'argent (pôle $+$) reliées par le circuit extérieur.

- Dans les fils, les électrons vont de l'électrode de zinc vers l'électrode d'argent.
- Le courant I circule en sens inverse : il sort de la pile par l'électrode d'argent (pôle $+$).
- Dans les solutions, les cations $\mathrm{Zn^{2+}}$ et $\mathrm{Ag^+}$ se déplacent dans le sens du courant, vers l'électrode d'argent ; les anions $\mathrm{NO_3^-}$ se déplacent en sens inverse, vers l'électrode de zinc.

Électrons : du zinc vers l'argent par le circuit extérieur ; courant : de l'argent vers le zinc à l'extérieur de la pile ; cations vers l'argent, anions vers le zinc dans les solutions.

PIÈGE
Confondre sens du courant et sens des électrons : le courant sort par le pôle $+$, les électrons, de charge négative, sortent par le pôle $-$.



11 · Pile zinc-argent en fonctionnement : les électrons vont du zinc vers l'argent, le courant en sens inverse