Chute verticale d'un ballon

Bac S 2008 Polynésie (ancien programme) · Exercice 3 **5 points** **Durée conseillée 1 h 05**

1.1 Donner l'expression littérale des valeurs des forces qui s'exercent sur le système pendant sa chute dans l'air, en notant k le coefficient de proportionnalité du frottement.

Système {ballon gonflé + bille}, étudié dans le référentiel du laboratoire. Trois forces s'exercent sur lui :

- son poids, vertical vers le bas : $P = M\,g$;
- la poussée d'Archimède, verticale vers le haut, égale au poids de l'air déplacé (volume V, masse $\rho\,V$) : $\Pi = \rho\,V\,g$;
- la force de frottement fluide, verticale vers le haut (opposée au mouvement) : $f = k\,v_G^2$.

$$\boxed{P = M\,g\ ;\ \Pi = \rho\,V\,g\ ;\ f = k\,v_G^2}$$

PIÈGE
Écrire $\Pi = M\,g$ ou oublier la poussée d'Archimède. Elle fait intervenir la masse volumique de l'air, pas celle du système, et ici elle vaut environ un tiers du poids.

1.2 En appliquant la deuxième loi de Newton, avec $\vec{j}$ unitaire orienté vers le bas, établir l'équation différentielle vérifiée par v_G .

Dans le référentiel du laboratoire, supposé galiléen, la deuxième loi de Newton appliquée au système de masse M constante s'écrit :

$$\vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{f} = M\,\vec{a}_G$$

Avec $\vec{P} = M\,g\,\vec{j}$, $\vec{\Pi} = -\rho\,V\,g\,\vec{j}$, $\vec{f} = -k\,v_G^2\,\vec{j}$ et $\vec{a}_G = \dfrac{\mathrm{d}v_G}{\mathrm{d}t}\,\vec{j}$ (mouvement vertical vers le bas), la projection sur l'axe (O, y) donne :

$$\boxed{M\,\frac{\mathrm{d}v_G}{\mathrm{d}t} = M\,g - \rho\,V\,g - k\,v_G^2}$$

MÉTHODE
Toujours dans cet ordre : système, référentiel galiléen, bilan des forces, deuxième loi de Newton en vecteurs, puis projection sur l'axe en regardant le sens de chaque force par rapport à $\vec{j}$.

1.3 Montrer que l'équation peut s'écrire $\dfrac{\mathrm{d}v_G}{\mathrm{d}t} = A - B\,v_G^2$ et en déduire les expressions littérales de A et B.

On divise chaque membre de l'équation de la question 1.2 par M :

$$\frac{\mathrm{d}v_G}{\mathrm{d}t} = g\left(1 - \frac{\rho\,V}{M}\right) - \frac{k}{M}\,v_G^2$$

C'est bien la forme demandée, avec un terme constant et un terme en v_G^2. Par identification :

$$\boxed{A = g\left(1 - \frac{\rho\,V}{M}\right) \text{ et } B = \frac{k}{M}}$$

1.4 Montrer que $A = 6{,}45$ SI et préciser son unité.

Données utiles $g = 9{,}81\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$; $\rho = 1{,}20\ \mathrm{g\cdot L^{-1}}$; $V = 3{,}05$ L ; $M = 10{,}7$ g

$\rho\,V = 1{,}20 \times 3{,}05 = 3{,}66$ g est une masse, exprimée en grammes comme M : le rapport $\dfrac{\rho\,V}{M}$ est sans unité.

$$A = 9{,}81 \times \left(1 - \frac{1{,}20 \times 3{,}05}{10{,}7}\right) = 6{,}45$$

La parenthèse étant sans unité, A a l'unité de g : c'est une accélération.

$$\boxed{A = 6{,}45\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}\text{, valeur attendue.}}$$

PIÈGE
Convertir M en kilogrammes sans convertir $\rho\,V$. Dans un rapport, il suffit que les deux masses soient dans la même unité.

COMPRENDRE
Trois chiffres significatifs, comme toutes les données. A est l'accélération au moment du lâcher ($v_G = 0$) : elle est inférieure à g à cause de la poussée d'Archimède.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$$9.81 \times \left(1 - \frac{1.20 \times 3.05}{10.7}\right) \approx 6.45443$$

1.5 Montrer que $B = \dfrac{A}{v_l^2}$, où v_l est la vitesse limite du système.

Quand la vitesse limite est atteinte, $v_G = v_l$ reste constante, donc $\dfrac{\mathrm{d}v_G}{\mathrm{d}t} = 0$.

L'équation différentielle devient $0 = A - B\,v_l^2$, soit :

$$\boxed{B = \frac{A}{v_l^2}}$$

MÉTHODE
Vitesse limite : écrire que la dérivée de la vitesse est nulle dans l'équation différentielle. On obtient une relation entre v_l et les constantes, sans avoir à résoudre l'équation.

1.6 Calculer la valeur numérique de B en précisant son unité.

Données utiles $A = 6{,}45\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$ (1.4) ; $v_l = 2{,}75\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

$$B = \frac{A}{v_l^2} = \frac{6{,}45}{2{,}75^2} = 0{,}853$$

Unité : $\dfrac{\mathrm{m \cdot s^{-2}}}{(\mathrm{m \cdot s^{-1}})^2} = \dfrac{\mathrm{m \cdot s^{-2}}}{\mathrm{m^2 \cdot s^{-2}}} = \mathrm{m^{-1}}$

$$\boxed{B = 0{,}853\ \mathrm{m^{-1}}}$$

PIÈGE
Oublier le carré sur v_l, dans le calcul ou dans l'unité : on trouverait $2{,}35\ \mathrm{s^{-1}}$, qui ne convient pas à un frottement en v^2.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$$\frac{6.45}{2.75^2} \approx 0.8528926$$

2.1 Quel est le rôle de la règle de 1,00 m placée à côté du ballon ?

La règle, de longueur connue, sert d'étalon : en la repérant sur une image, on indique au logiciel de pointage l'échelle de la vidéo.

La règle fixe l'échelle : le logiciel convertit les distances mesurées sur l'image en distances réelles, en mètres.

COMPRENDRE
La règle doit être dans le même plan que la trajectoire du ballon, à la même distance de la caméra, sinon l'échelle est faussée par la perspective.

2.2 À l'aide des cellules pertinentes des colonnes t et y, déterminer la valeur de v_{exp} à la date $t = 0{,}200$ s.

Données utiles ligne 5 : $t_5 = 0{,}160$ s, $y_5 = 0{,}092$ m ; ligne 7 : $t_7 = 0{,}240$ s, $y_7 = 0{,}184$ m

La vitesse à la date $t_6 = 0{,}200$ s est assimilée à la vitesse moyenne entre les deux dates qui l'encadrent, t_5 et t_7 :

$$v_{exp}(t_6) = \frac{y_7 - y_5}{t_7 - t_5} = \frac{0{,}184 - 0{,}092}{0{,}240 - 0{,}160}$$

$$\boxed{v_{exp}(t_6) = 1{,}15\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}}$$

PIÈGE
Calculer $\dfrac{y_6}{t_6} = 0{,}67\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$: c'est la vitesse moyenne depuis le lâcher, pas la vitesse à la date t_6.

COMPRENDRE
Le tableau confirme la méthode : à $t = 0{,}120$ s, $\dfrac{0{,}092 - 0{,}031}{0{,}160 - 0{,}080} = 0{,}76\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, valeur de la colonne v_{exp}.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$$\frac{0.184 - 0.092}{0.240 - 0.160} \approx 1.15$$

2.3 À partir de l'équation différentielle, déterminer par la méthode itérative d'Euler la valeur de v à la date $t = 0{,}200$ s.

Données utiles $A = 6{,}45\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ (1.4) ; $B = 0{,}853\ \text{m}^{-1}$ (1.6) ; $v(t_5) = 1{,}00\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ à $t_5 = 0{,}160$ s ; pas $\Delta t = 0{,}040$ s

Sur un pas de durée Δt assez petite, on assimile $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ à $\frac{\Delta v}{\Delta t}$, donc $\Delta v = \left(A - B\,v^2\right)\Delta t$. D'une ligne du tableau à la suivante :

$$v(t_6) = v(t_5) + \left(A - B\,v(t_5)^2\right)\Delta t$$

$$v(t_6) = 1{,}00 + \left(6{,}45 - 0{,}853 \times 1{,}00^2\right) \times 0{,}040$$

$v(t_6) = 1{,}22\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ (arrondi au centième, comme la colonne v)

COMPRENDRE
Le modèle donne $1{,}22\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ et la mesure $1{,}15\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$: l'écart, d'environ 6 %, est compatible avec l'imprécision du pointage.

MÉTHODE
Euler : nouvelle vitesse = ancienne vitesse + accélération calculée avec l'ancienne vitesse × pas. On vérifie sur une ligne connue : $0{,}76 + (6{,}45 - 0{,}853 \times 0{,}76^2) \times 0{,}040 = 1{,}00$.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$$1.00 + (6.45 - 0.853 \times 1.00^2) \times 0.040 \approx 1.22388$$

3.1 Tracer l'allure de la courbe $v = f(t)$ en y indiquant la vitesse limite v_l et le temps caractéristique τ. Distinguer deux régimes et les nommer.

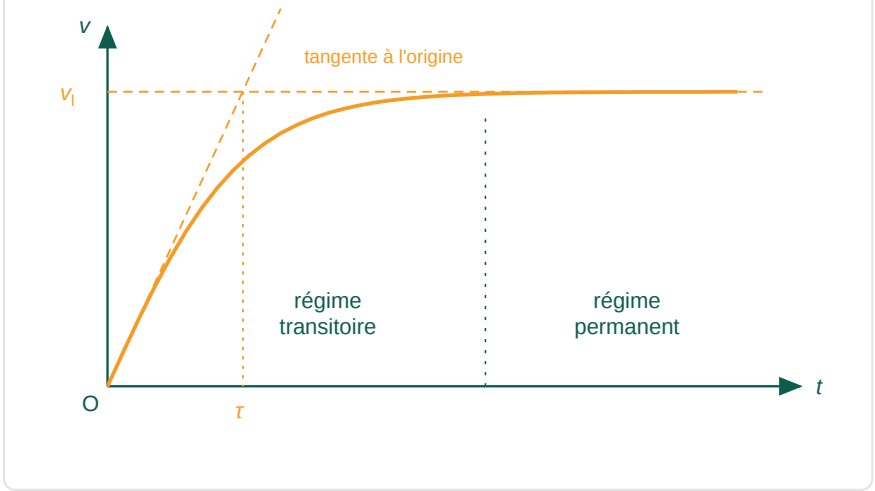
La courbe part de l'origine ($v = 0$ à $t = 0$), croît de moins en moins vite et tend vers l'asymptote horizontale $v = v_l$.

Le temps caractéristique τ est l'abscisse du point où la tangente à l'origine coupe cette asymptote.

Régime transitoire tant que la vitesse augmente ; régime permanent quand elle est stabilisée à $v_l = 2{,}75\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ (voir le graphe).

PIÈGE
Placer τ à la date où la courbe atteint v_l. À $t = \tau$ la vitesse n'a pas encore sa valeur limite ; le régime permanent ne s'installe qu'après plusieurs τ.

COMPRENDRE
La tangente à l'origine a pour pente A ; elle atteint v_l à la date $\frac{v_l}{A} = \frac{2{,}75}{6{,}45} = 0{,}43$ s : on retrouve le τ des expérimentateurs.



3.1 · Allure de la courbe $v = f(t)$: asymptote v_l, tangente à l'origine et temps caractéristique τ

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$$\frac{2.75}{6.45} \approx 0.4263566$$

3.2 Justifier que le tracé de la tangente à la courbe $v = f(t)$ permet d'évaluer l'accélération de G à chaque instant. En déduire, en le justifiant, l'évolution de cette accélération lors des deux régimes.

Le mouvement est rectiligne, selon l'axe (O, y), et toujours vers le bas : l'accélération de G a pour valeur $a_G = \dfrac{\mathrm{d}v_G}{\mathrm{d}t}$. Or la dérivée de v à une date donnée est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $v = f(t)$ à cette date.

Régime transitoire : la tangente est de moins en moins inclinée, son coefficient directeur diminue, donc l'accélération diminue (de A au départ jusqu'à zéro).

Régime permanent : la tangente est horizontale, de coefficient directeur nul.

L'accélération décroît pendant le régime transitoire, puis elle est nulle en régime permanent : le mouvement devient rectiligne uniforme.

COMPRENDRE

L'équation différentielle dit la même chose : $a_G = A - B\,v_G^2$ diminue quand v_G augmente, et s'annule pour $v_G = v_l$. Les forces se compensent alors (première loi de Newton).