Du système à sa modélisation

Bac S 2008 Polynésie rattrapage (ancien programme) · Exercice 3 **9 points** **Durée conseillée 1 h 57**

1.1 Partie I (ondes sismiques). À quels types d'ondes mécaniques les ondes P et S correspondent-elles ? Justifier.

Ondes P (schéma a) : la matière se comprime et se dilate dans la direction où l'onde avance. La déformation est parallèle à la direction de propagation : ce sont des ondes **longitudinales**.

Ondes S (schéma b) : le cisaillement est vertical alors que l'onde avance horizontalement. La déformation est perpendiculaire à la direction de propagation : ce sont des ondes **transversales**.

P : ondes longitudinales ; S : ondes transversales.

MÉTHODE
Pour classer une onde mécanique, comparer deux directions : celle de la déformation du milieu et celle de la propagation. Parallèles : longitudinale. Perpendiculaires : transversale.

1.2 À partir du texte, quelle grandeur peut-on utiliser pour comparer la propagation des deux ondes ?

Le texte indique que les ondes P sont « les plus rapides » : on compare donc les vitesses de propagation.

La grandeur utilisée est la célérité de l'onde.

2.1 Partie I, onde sur une corde. Calculer la célérité de l'onde.

Données utiles $t_0 = 0$ s ; $t_1 = 0{,}20$ s ; échelle du schéma : $ON = 1{,}00$ m

À la date t_1, le front de la perturbation est en M : l'onde a parcouru la distance OM pendant la durée $t_1 - t_0$.

Sur le schéma, la mesure à la règle donne $OM = 2{,}5 \times ON$, soit $OM = 2{,}5$ m.

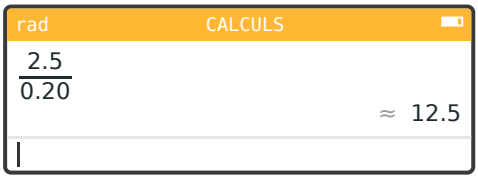
$$v = \frac{OM}{t_1 - t_0} = \frac{2{,}5}{0{,}20} = 12{,}5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$v \approx 13 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

PIÈGE
Le point M repère le front de l'onde, c'est-à-dire l'endroit le plus éloigné atteint à t_1. Mesurer jusqu'au sommet de la bosse donnerait une distance trop courte.

COMPRENDRE
La durée $0{,}20$ s et la distance lue sur le schéma ont deux chiffres significatifs : le résultat s'écrit avec deux chiffres. On garde $12{,}5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ pour les calculs suivants.

À LA CALCULATRICE



2.2 Une modification de l'amplitude de la perturbation, puis de la tension de la corde, modifie-t-elle la célérité de l'onde ? Justifier.

La célérité d'une onde mécanique dépend seulement des propriétés du milieu de propagation.

L'amplitude est une caractéristique de la perturbation, pas du milieu : la célérité ne change pas.

La tension est une propriété de la corde, donc du milieu : la célérité change (elle augmente quand la corde est plus tendue).

Amplitude : pas d'effet sur la célérité ; tension de la corde : la célérité est modifiée.

2.3 Calculer le retard τ de la perturbation au point N, situé à 1,00 m de la source, par rapport à la source O.

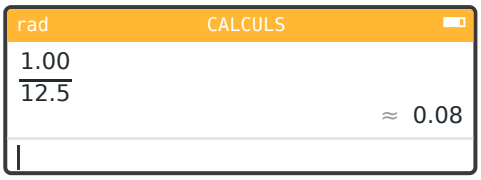
Données utiles $ON = 1{,}00$ m ; $v = 12{,}5$ m · s^{-1} (Q2.1)

Le retard est la durée mise par l'onde pour aller de O à N :

$$\tau = \frac{ON}{v} = \frac{1{,}00}{12{,}5} = 0{,}080 \text{ s}$$

$\tau = 0{,}080$ s

À LA CALCULATRICE



2.4 Représenter l'allure du déplacement du point N de la corde sur un axe temporel.

Le point N reste immobile jusqu'à la date $\tau = 0{,}080$ s, date d'arrivée du front de l'onde.

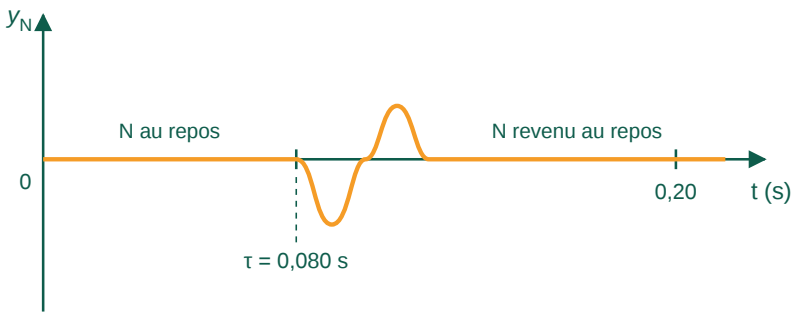
Il reproduit ensuite le mouvement de la source. Sur le schéma, le front (côté M) commence par un creux, suivi d'une bosse : N descend d'abord, remonte au-dessus de sa position de repos, puis revient au repos.

La perturbation s'étend sur environ $0{,}5$ m : le passage dure environ $\frac{0{,}5}{12{,}5} = 0{,}04$ s.

N est au repos jusqu'à $0{,}080$ s, descend puis monte, et retrouve le repos vers $0{,}12$ s (voir le graphique).

PIÈGE

Le graphique en fonction du temps n'est pas la copie du schéma de la corde : ce qui est le plus à droite sur la corde (le front) arrive en premier, donc se place le plus à gauche sur l'axe des temps.



2.4 · Déplacement du point N au cours du temps (sans souci d'échelle verticale)

3 Partie I, la source est un vibreur de fréquence 100 Hz. Déterminer la période et la longueur d'onde.

Données utiles $f = 100$ Hz ; $v = 12{,}5$ m · s^{-1} (Q2.1)

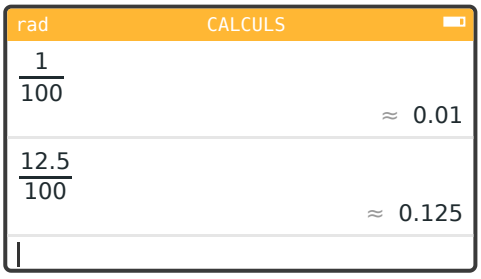
Période : $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{100} = 1{,}00 \times 10^{-2}$ s.

Longueur d'onde : distance parcourue par l'onde pendant une période, la corde et sa tension étant inchangées :

$$\lambda = v\,T = \frac{v}{f} = \frac{12{,}5}{100} = 0{,}125 \text{ m}$$

$T = 1{,}00 \times 10^{-2}$ s ; $\lambda \approx 0{,}13$ m

À LA CALCULATRICE



2.1 Partie II (décroissance radioactive). Donner la composition du noyau du radon 220.

Données utiles $^{220}_{86}\mathrm{Rn}$

$Z = 86$: le noyau contient 86 protons.

$A = 220$ nucléons, donc $A - Z = 220 - 86 = 134$ neutrons.

86 protons et 134 neutrons.

2.2 Écrire l'équation de désintégration du radon 220 en polonium 216.

Données utiles $^{220}_{86}\mathrm{Rn}$; $^{216}_{84}\mathrm{Po}$

Le radon 220 est émetteur α : il émet un noyau d'hélium 4. Conservation du nombre de nucléons : $220 = 216 + 4$; conservation de la charge : $86 = 84 + 2$.

$$^{220}_{86}\mathrm{Rn} \longrightarrow {}^{216}_{84}\mathrm{Po} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$$

2.3 Tracer la courbe moyenne sur l'enregistrement de l'annexe, puis déterminer graphiquement la demi-vie $t_{1/2}$ du radon 220 en explicitant la méthode.

On trace une courbe régulière qui passe au milieu du nuage de points. Prolongée jusqu'à $t = 0$, elle part d'environ $n_0 = 450$ désintégrations.

Le nombre de désintégrations détectées est proportionnel au nombre de noyaux encore présents : au bout d'une demi-vie, il est divisé par deux.

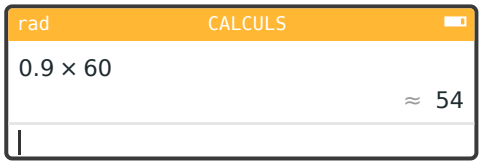
On place $\dfrac{n_0}{2} = 225$ sur l'axe vertical, on rejoint la courbe moyenne et on lit l'abscisse du point obtenu.

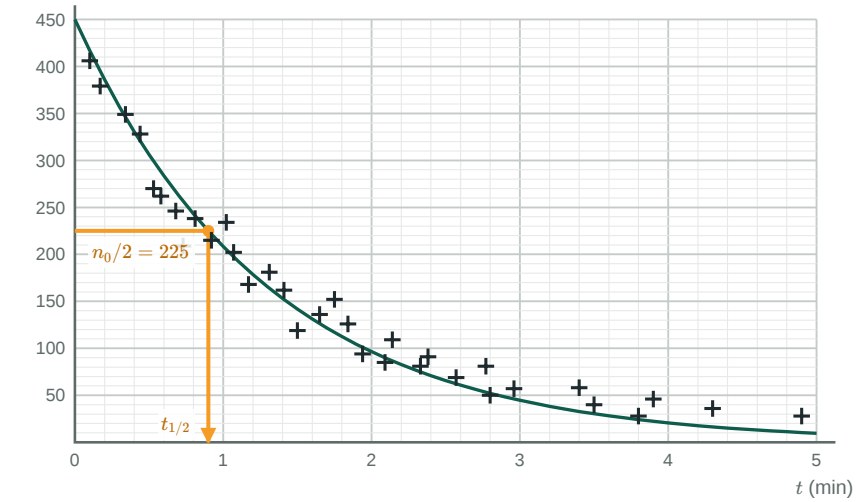
$t_{1/2} \approx 0{,}9$ min, soit environ 54 s.

COMPRENDRE

Les points sont dispersés car la désintégration est un phénomène aléatoire. Selon le tracé de la courbe moyenne, on lit entre $0{,}8$ et $1{,}0$ min : toute valeur de cet intervalle, justifiée par la construction, est acceptable.

À LA CALCULATRICE





2.3 · Annexe (début de l'enregistrement) : courbe moyenne et lecture de $t_{1/2}$

2.4 Déterminer graphiquement la constante de temps τ. En déduire la constante radioactive λ.

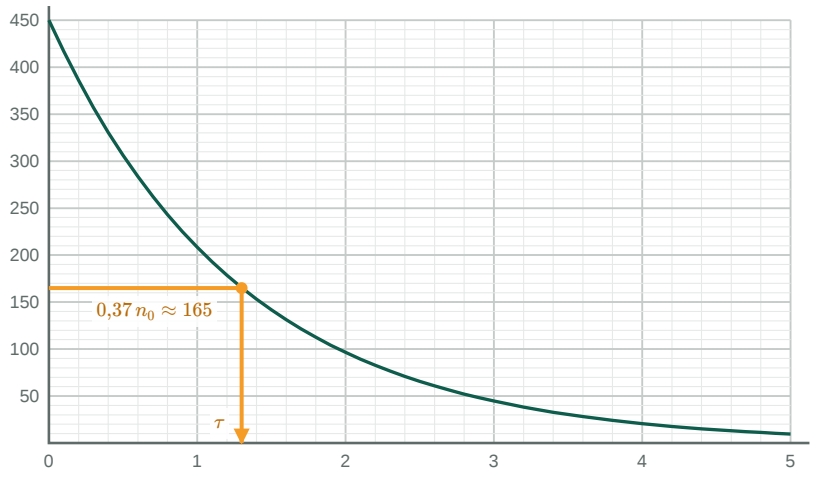
Pour une décroissance exponentielle, $n(\tau) = n_0\, e^{-1} \approx 0{,}37\, n_0$, soit $0{,}37 \times 450 \approx 165$ désintégrations.

La courbe moyenne passe par cette ordonnée à $\tau \approx 1{,}3$ min, soit 78 s. (Autre construction : la tangente à l'origine coupe l'axe des abscisses à $t = \tau$.)

$$\lambda = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{78} = 1{,}3 \times 10^{-2}\ \text{s}^{-1}$$

$\tau \approx 1{,}3$ min $= 78$ s ; $\lambda \approx 1{,}3 \times 10^{-2}\ \text{s}^{-1}$

désintégrations



2.4 · Annexe : lecture de τ à 37 % de la valeur initiale

PIÈGE
Convertir τ en secondes avant de calculer λ en s^{-1}. La tangente à l'origine est difficile à tracer sur des points aussi dispersés : la valeur de τ obtenue ainsi est peu précise.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

0.37 × 450 ≈ 166.5

1.3 × 60 ≈ 78

$\frac{1}{78}$ ≈ 0.01282051

2.5 Le logiciel modélise le phénomène par $n(t) = 450\, e^{-0{,}012\, t}$ avec t en s. En déduire la constante radioactive λ.

La loi de décroissance radioactive s'écrit $n(t) = n_0\, e^{-\lambda t}$. Par identification avec le modèle : $n_0 = 450$ et $\lambda = 0{,}012\ \text{s}^{-1}$.

$\lambda = 1{,}2 \times 10^{-2}\ \text{s}^{-1}$

2.6 Montrer que $\lambda = \dfrac{\ln 2}{t_{1/2}}$ et vérifier l'accord de sa valeur numérique avec les résultats précédents.

Données utiles $t_{1/2} \approx 54$ s (Q2.3) ; $\lambda \approx 1{,}3 \times 10^{-2}\ \text{s}^{-1}$ (Q2.4) ; $\lambda = 1{,}2 \times 10^{-2}\ \text{s}^{-1}$ (Q2.5)

Par définition de la demi-vie : $n(t_{1/2}) = \dfrac{n_0}{2}$, soit $n_0\, e^{-\lambda t_{1/2}} = \dfrac{n_0}{2}$.

Donc $e^{-\lambda t_{1/2}} = \dfrac{1}{2}$, puis $-\lambda\, t_{1/2} = \ln \dfrac{1}{2} = -\ln 2$, d'où $\lambda = \dfrac{\ln 2}{t_{1/2}}$.

$$\lambda = \frac{\ln 2}{54} = 1{,}3 \times 10^{-2}\ \text{s}^{-1}$$

Les trois déterminations ($1{,}3 \times 10^{-2}$; $1{,}3 \times 10^{-2}$; $1{,}2 \times 10^{-2}\ \text{s}^{-1}$) s'accordent à moins de 10 % près, ce qui est satisfaisant pour des lectures graphiques.

$\lambda = \dfrac{\ln 2}{t_{1/2}} \approx 1{,}3 \times 10^{-2}\ \text{s}^{-1}$, en accord avec les valeurs précédentes.

COMPRENDRE
La valeur du logiciel est la plus fiable : elle s'appuie sur tous les points de mesure, alors qu'une lecture graphique dépend du tracé de la courbe moyenne.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\frac{\ln(2)}{54}$ ≈ 0.01283606

2.7 Donner la définition de l'activité et son unité.

L'activité A d'un échantillon radioactif est le nombre moyen de désintégrations qui s'y produisent par seconde.

Elle s'exprime en becquerels (Bq) : 1 Bq = 1 désintégration par seconde.

3.1 Partie III (charge d'un condensateur). Donner la relation entre la charge $q(t) = q_A(t)$ du condensateur et l'intensité $i(t)$ du courant.

Le courant i est orienté vers l'armature A, qui porte la charge q : l'intensité est le débit de charges arrivant sur cette armature.

$$i(t) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

PIÈGE
Le signe dépend de l'orientation : si la flèche de i s'éloignait de l'armature qui porte q, on aurait $i = -\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$.

3.2 Donner la relation entre $q(t)$, la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur et sa capacité C.

La flèche de la tension u pointe vers l'armature A, qui porte la charge q.

$$q(t) = C\,u(t)$$

3.3 Montrer que la tension $u(t)$ vérifie l'équation différentielle $E = RC\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u$.

Loi d'additivité des tensions (loi des mailles) : $E = u_R + u$.

Loi d'Ohm, la résistance étant en convention récepteur : $u_R = R\,i$.

Or $i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ et $q = C\,u$, avec C constante : $i = C\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.

En remplaçant : $E = R\,C\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u$.

$E = RC\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u$: c'est bien l'équation attendue.

MÉTHODE
Circuit RC : 1) loi des mailles ; 2) loi d'Ohm ; 3) $i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ et $q = Cu$ pour tout exprimer en fonction de u.

3.4 Le logiciel propose la solution $u = 5{,}0\,(1 - e^{-100\,t})$ avec t en s. À quoi correspondent les valeurs numériques 5,0 et 100 ?

La solution de l'équation différentielle, pour un condensateur initialement déchargé, s'écrit $u(t) = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$ avec $\tau = RC$.

Par identification : $5{,}0$ est la tension E du générateur, en volts, valeur atteinte par u en fin de charge ; 100 est l'inverse de la constante de temps, en s^{-1}.

$E = 5{,}0$ V et $\frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC} = 100\ \mathrm{s}^{-1}$

3.5 Déterminer graphiquement la constante de temps τ sur la courbe de l'annexe. Calculer sa valeur théorique et conclure.

Données utiles $C = 10\ \mu\text{F}$; $R = 1{,}0\ \text{k}\Omega$; $E = 5{,}0$ V (Q3.4)

À la date $t = \tau$: $u(\tau) = E\left(1 - e^{-1}\right) = 0{,}63\,E = 0{,}63 \times 5{,}0 \approx 3{,}2$ V.

Sur la courbe, l'ordonnée 3,2 V correspond à l'abscisse $\tau = 10$ ms.

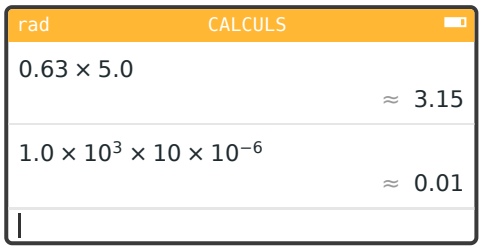
Valeur théorique : $\tau = RC = 1{,}0 \times 10^{3} \times 10 \times 10^{-6} = 1{,}0 \times 10^{-2}$ s, soit 10 ms.

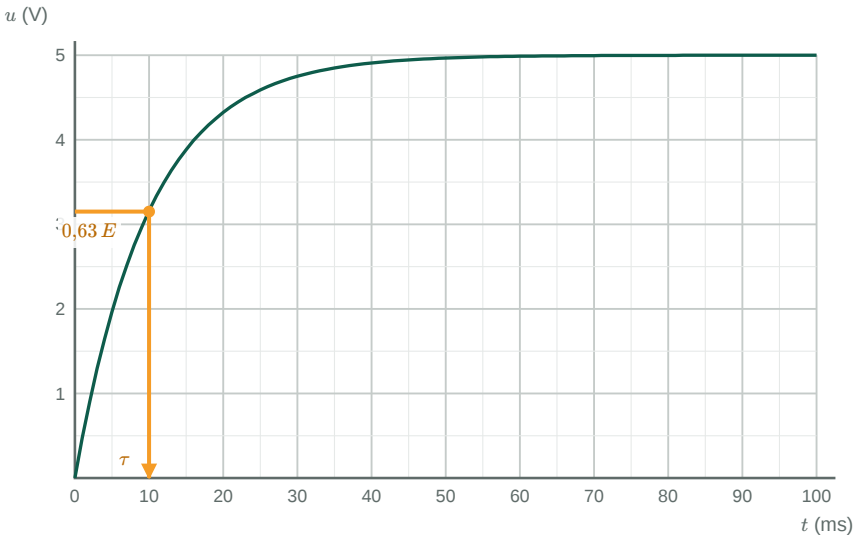
Les deux valeurs sont égales : le modèle du circuit RC décrit correctement la charge. C'est aussi cohérent avec $\dfrac{1}{\tau} = 100\ \text{s}^{-1}$.

$\tau_{\text{graphique}} = 10$ ms et $\tau_{\text{théorique}} = RC = 10$ ms : accord.

PIÈGE
Convertir R en ohms et C en farads : $1\ \text{k}\Omega = 10^{3}\ \Omega$ et $1\ \mu\text{F} = 10^{-6}$ F. Sans conversion, le produit RC n'est pas en secondes.

À LA CALCULATRICE





3.5 · Annexe : lecture de τ sur la courbe de charge

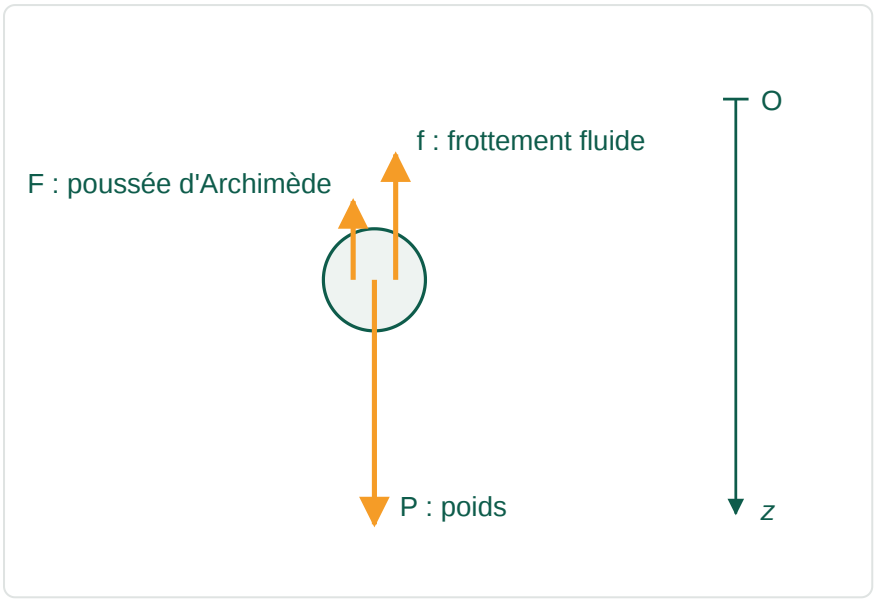
4.1 Partie IV (chute avec frottement). Représenter, sur un schéma, les forces extérieures appliquées à la bille en chute verticale dans le fluide.

Système : la bille, dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.
Trois forces verticales :

- le poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$, vers le bas ;
- la poussée d'Archimède $\vec{F} = -\rho\,V\,\vec{g}$, vers le haut ;
- la force de frottement fluide $\vec{f} = -k\,\vec{v}$, opposée à la vitesse, donc vers le haut.

Poids vers le bas ; poussée d'Archimède et frottement vers le haut (voir le schéma).

COMPRENDRE
Tant que la bille accélère, le vecteur poids est plus long que la somme des deux autres. Quand la vitesse limite est atteinte, les trois forces se compensent.



4.1 · Forces appliquées à la bille (sans souci d'échelle, points d'application décalés pour la lisibilité)

4.2 En appliquant la deuxième loi de Newton, montrer que l'équation différentielle est de la forme $a - b\,v = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ avec $a = 8{,}2\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$ et $b = 8{,}7\ \mathrm{s^{-1}}$.

Données utiles $R = 1{,}00\ \mathrm{cm}$; $V = 4{,}20\ \mathrm{cm^3}$; $m = 32{,}6\ \mathrm{g}$; $\eta = 1{,}50\ \mathrm{N\cdot s\cdot m^{-2}}$; $\rho = 1{,}30\times10^{3}\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$; $g = 9{,}81\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$; $k = 6\pi R\eta$

Deuxième loi de Newton appliquée à la bille : $\vec{P} + \vec{F} + \vec{f} = m\,\vec{a}_G$.

Projection sur l'axe Oz dirigé vers le bas : $m\,g - \rho V\,g - k\,v = m\,\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$.

En divisant par m :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g\left(1 - \frac{\rho V}{m}\right) - \frac{k}{m}\,v \qquad \text{soit} \qquad a = g\left(1 - \frac{\rho V}{m}\right),\quad b = \frac{6\pi R\eta}{m}$$

$$a = 9{,}81 \times \left(1 - \frac{1{,}30\times10^{3}\times4{,}20\times10^{-6}}{32{,}6\times10^{-3}}\right) = 8{,}17\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

$$b = \frac{6\pi\times1{,}00\times10^{-2}\times1{,}50}{32{,}6\times10^{-3}} = 8{,}67\ \mathrm{s^{-1}}$$

$a \approx 8{,}2\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$ et $b \approx 8{,}7\ \mathrm{s^{-1}}$: valeurs attendues.

PIÈGE
Trois conversions : $V = 4{,}20\times10^{-6}\ \mathrm{m^3}$ (et non 10^{-3}), $R = 1{,}00\times10^{-2}$ m, $m = 32{,}6\times10^{-3}$ kg.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$9.81 \times \left(1 - \dfrac{1.30\times10^{3}\times4.20\times10^{-6}}{32.6\times10^{-3}}\right) \approx 8.166975$

$\dfrac{6\times\pi\times1.00\times10^{-2}\times1.50}{32.6\times10^{-3}} \approx 8.673109$

4.3 Déterminer la vitesse limite à l'aide du graphique. La calculer à l'aide de l'équation différentielle et conclure.

Données utiles graphique : une division verticale correspond à $0{,}2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$; $a = 8{,}2\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$ et $b = 8{,}7\ \mathrm{s^{-1}}$ (Q4.2)

Graphique : la courbe tend vers un palier horizontal situé à $4{,}7$ divisions, soit $v_{\lim} = 4{,}7\times0{,}2 = 0{,}94\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Équation différentielle : quand la vitesse limite est atteinte, v est constante, donc $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$ et $a - b\,v_{\lim} = 0$.

$$v_{\lim} = \frac{a}{b} = \frac{8{,}2}{8{,}7} = 0{,}94\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

Les deux valeurs coïncident : le modèle de frottement $\vec{f} = -k\,\vec{v}$ est validé pour cette chute.

$v_{\lim} = 0{,}94\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ par le graphique comme par le calcul.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$4.7 \times 0.2 \approx 0.94$

$\dfrac{8.2}{8.7} \approx 0.9425287$

5.1 Partie V (GALILEO). Calculer la vitesse du satellite sur son orbite circulaire, en déduire sa période.

Données utiles $h = 2{,}00 \times 10^4$ km ; $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ SI ; $R_T = 6380$ km ; $M_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg ; $v = \sqrt{\dfrac{G\,M_T}{R_T + h}}$

Rayon de l'orbite : $R_T + h = 6{,}38 \times 10^6 + 2{,}00 \times 10^7 = 2{,}638 \times 10^7$ m.

$$v = \sqrt{\frac{G\,M_T}{R_T + h}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}98 \times 10^{24}}{2{,}638 \times 10^7}} = 3{,}89 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Pendant une période T, le satellite parcourt à vitesse constante la circonférence $2\pi(R_T + h)$:

$$T = \frac{2\pi\,(R_T + h)}{v} = \frac{2\pi \times 2{,}638 \times 10^7}{3{,}89 \times 10^3} = 4{,}26 \times 10^4 \text{ s}$$

$v = 3{,}89 \times 10^3$ m · s^{-1} et $T = 4{,}26 \times 10^4$ s (environ 11,8 h).

PIÈGE
Les distances sont données en kilomètres : les convertir en mètres. Le rayon de l'orbite est $R_T + h$, pas l'altitude h seule.

À LA CALCULATRICE

rad — CALCULS

$6.38 \times 10^6 + 2.00 \times 10^7 \approx 2.638 \times 10^7$

$\sqrt{\dfrac{6.67 \times 10^{-11} \times 5.98 \times 10^{24}}{2.638 \times 10^7}} \approx 3888.446$

$\dfrac{2 \times \pi \times 2.638 \times 10^7}{3.89 \times 10^3} \approx 42609.36$

$\dfrac{4.26 \times 10^4}{3600} \approx 11.83333$

5.2 Déterminer la durée t minimale mise par les ondes envoyées par le satellite pour arriver au récepteur situé au sol.

Données utiles $h = 2{,}00 \times 10^7$ m ; $c = 3{,}00 \times 10^8$ m · s^{-1}

La durée est minimale quand le trajet est le plus court, c'est-à-dire quand le satellite est à la verticale du récepteur : la distance parcourue est alors l'altitude h.

$$t = \frac{h}{c} = \frac{2{,}00 \times 10^7}{3{,}00 \times 10^8} = 6{,}67 \times 10^{-2} \text{ s}$$

$t = 6{,}67 \times 10^{-2}$ s

À LA CALCULATRICE

rad — CALCULS

$\dfrac{2.00 \times 10^7}{3.00 \times 10^8} \approx 0.06666667$

5.3 Le système prévoit un écart d'un centimètre sur la position. Quel est l'écart Δt sur la durée t ? La « précision » des horloges est-elle suffisante ?

Données utiles $d = 1$ cm ; $c = 3{,}00 \times 10^8$ m · s^{-1} ; précision des horloges : 10^{-12} s

Un écart de position d correspond à la durée mise par l'onde pour parcourir cette distance :

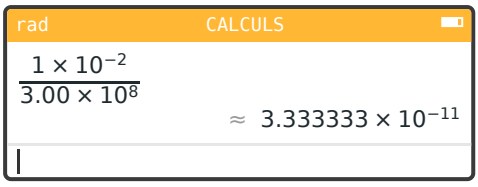
$$\Delta t = \frac{d}{c} = \frac{1 \times 10^{-2}}{3{,}00 \times 10^8} = 3 \times 10^{-11} \text{ s}$$

La précision des horloges, 10^{-12} s, est environ 30 fois plus petite que cet écart : elle est suffisante.

$\Delta t \approx 3 \times 10^{-11}$ s ; la précision des horloges (10^{-12} s) est suffisante.

COMPRENDRE
Pour distinguer deux positions séparées d'un centimètre, l'horloge doit mesurer des durées plus petites que Δt. Avec 10^{-12} s, l'incertitude de position due à l'horloge n'est que de 0,3 mm.

À LA CALCULATRICE



5.4 Les horloges au césium fonctionnent sur une transition atomique de fréquence $\nu = 9\,192\,631\,770$ Hz. Calculer l'énergie du photon correspondant.

Données utiles $h = 6{,}63 \times 10^{-34}$ J·s

Énergie d'un photon de fréquence ν :

$$E = h\nu = 6{,}63 \times 10^{-34} \times 9\,192\,631\,770 = 6{,}09 \times 10^{-24} \text{ J}$$

$$\boxed{E = 6{,}09 \times 10^{-24} \text{ J}}$$

PIÈGE

Dans cette question, h désigne la constante de Planck, et non l'altitude du satellite notée elle aussi h dans les questions précédentes.

À LA CALCULATRICE

