Corrigé complet — Bac S 2007 Métropole rattrapage (ancien programme)

Physique-chimie, Bac S (épreuve écrite) **16 points** **3 h 30**

Ex 1	**L'élément iode d'hier à aujourd'hui** Oxydoréduction · Quotient de réaction et constante d'équilibre · Suivi cinétique par spectrophotométrie · Temps de demi-réaction · Facteurs cinétiques · Électrolyse	6,5 pts	1 h 18	19 questions	p. 2
Ex 2	**Système d'allumage classique dans un moteur à essence** Bobine et circuit RL · Équation différentielle du premier ordre · Constante de temps · Oscillations électriques d'un circuit LC · Période propre · Régime pseudo-périodique	5,5 pts	1 h 05	16 questions	p. 9
Ex 3	**Spécialité : Petite histoire d'une lentille et de deux miroirs** Miroir plan · Miroir sphérique · Lentille mince convergente · Relation de conjugaison · Télescope de Newton · Grossissement	4 pts	52 min	11 questions	p. 14
Ex 4	**Des lois de Kepler à l'étude d'un astéroïde** Lois de Kepler · Force de gravitation · Deuxième loi de Newton · Mouvement circulaire uniforme · Masse d'un astre attracteur	4 pts	52 min	13 questions	p. 19

Comment s'en servir. Fais d'abord le sujet en temps limité, puis corrige-toi exercice par exercice. À gauche de chaque question, sur les carreaux : ce qu'il faut écrire sur ta copie. À droite : les pièges, ce qu'il faut comprendre et les méthodes.

L'élément iode d'hier à aujourd'hui

Bac S 2007 Métropole rattrapage (ancien programme) · Exercice 1 **6,5 points** **Durée conseillée 1 h 18**

1.1 La réaction de synthèse du diiode est-elle une réaction acide-base ou d'oxydoréduction ? Justifier.

Données utiles couples IO_3^-/I_2 et SO_4^{2-}/HSO_3^-

Les réactifs IO_3^- et HSO_3^- appartiennent à deux couples oxydant/réducteur des données. Demi-équations :

- réduction de l'ion iodate : $2\,IO_3^- + 12\,H^+ + 10\,e^- = I_2 + 6\,H_2O$
- oxydation de l'ion hydrogénosulfite : $HSO_3^- + H_2O = SO_4^{2-} + 3\,H^+ + 2\,e^- \quad (\times 5)$

La somme donne $2\,IO_3^- + 5\,HSO_3^- = I_2 + 5\,SO_4^{2-} + 3\,H^+ + H_2O$, soit, en ajoutant $3\,H_2O$ de chaque côté, l'équation de l'énoncé. Dix électrons passent du réducteur HSO_3^- à l'oxydant IO_3^-.

C'est une réaction d'**oxydoréduction** (transfert d'électrons entre HSO_3^- et IO_3^-).

PIÈGE
La présence de H_3O^+ dans l'équation ne suffit pas à en faire une réaction acide-base : IO_3^- et I_2 ne forment pas un couple acide/base, ils ne diffèrent pas d'un simple ion H^+.

MÉTHODE
Pour reconnaître une oxydoréduction : repérer deux couples oxydant/réducteur, écrire les deux demi-équations, puis vérifier que leur combinaison redonne l'équation proposée.

1.2 Donner l'expression de la constante d'équilibre de cette transformation en fonction des concentrations des espèces dissoutes.

La constante d'équilibre est la valeur du quotient de réaction dans l'état d'équilibre ; l'eau, solvant, n'y figure pas.

$$K = \frac{[SO_4^{2-}]_{éq}^5\,[I_2]_{éq}\,[H_3O^+]_{éq}^3}{[IO_3^-]_{éq}^2\,[HSO_3^-]_{éq}^5}$$

PIÈGE
Oublier les exposants (nombres stœchiométriques 5, 3, 2 et 5) ou faire apparaître l'eau : H_2O est le solvant, mais H_3O^+ est une espèce dissoute et doit figurer.

1.3 On peut être amené à ajouter de l'eau dans la cuve. Le pH de l'eau utilisée a-t-il une incidence sur l'évolution de l'équilibre ? Justifier.

Le quotient de réaction Q_r a la même expression que K : il contient $[H_3O^+]^3$, et $[H_3O^+] = 10^{-pH}$ (en $mol \cdot L^{-1}$).

L'eau ajoutée modifie la concentration en ions oxonium du mélange d'une façon qui dépend de son pH : une eau acide apporte des ions H_3O^+, une eau basique apporte des ions HO^- qui en consomment. La valeur prise par Q_r après l'ajout, donc son écart à K, dépend ainsi du pH de l'eau.

Par exemple, plus l'eau est basique, plus $[H_3O^+]$ est faible : Q_r devient inférieur à K et le système évolue dans le sens direct, celui de la formation du diiode.

Oui : $[H_3O^+]$ intervient dans Q_r, donc le pH de l'eau ajoutée influe sur l'évolution du système.

COMPRENDRE
Critère d'évolution : si $Q_r < K$, le système évolue dans le sens direct ; si $Q_r > K$, dans le sens inverse. K ne dépend que de la température ; c'est Q_r que l'ajout d'eau modifie.

2.1.1 Compléter le tableau d'évolution du système. La transformation étant considérée comme totale, calculer l'avancement final x_f.

Données utiles $c_A = c_B = c_C = 0{,}10\ \text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$; $V_A = 30{,}0$ mL ; $V_B = 60{,}0$ mL ; $V_C = 10{,}0$ mL

Quantités initiales :

- $n_i(H_2O_2) = c_C V_C = 0{,}10 \times 10{,}0 \times 10^{-3} = 1{,}0 \times 10^{-3}$ mol
- $n_i(I^-) = c_B V_B = 0{,}10 \times 60{,}0 \times 10^{-3} = 6{,}0 \times 10^{-3}$ mol
- $n_i(H_3O^+) = c_A V_A = 0{,}10 \times 30{,}0 \times 10^{-3} = 3{,}0 \times 10^{-3}$ mol

Avancement maximal selon chaque réactif :

- H_2O_2 : $1{,}0 \times 10^{-3} - x = 0$, soit $x = 1{,}0 \times 10^{-3}$ mol
- I^- : $6{,}0 \times 10^{-3} - 2x = 0$, soit $x = 3{,}0 \times 10^{-3}$ mol
- H_3O^+ : $3{,}0 \times 10^{-3} - 2x = 0$, soit $x = 1{,}5 \times 10^{-3}$ mol

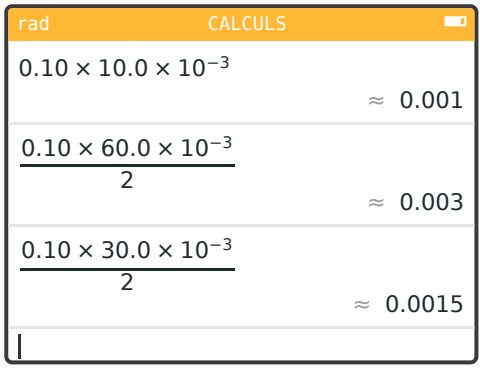
La plus petite valeur est obtenue pour H_2O_2 : c'est le réactif limitant.
La transformation étant totale, $x_f = x_{max}$.

$x_f = 1{,}0 \times 10^{-3}$ mol (réactif limitant : H_2O_2)

PIÈGE
Comparer directement les quantités initiales sans tenir compte des nombres stœchiométriques : pour I^- et H_3O^+, il faut diviser la quantité initiale par 2.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme les concentrations ($0{,}10\ \text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$), données les moins précises. Les volumes en mL sont convertis en litres.

À LA CALCULATRICE



Équation		H_2O_2(aq) +	2 I^-(aq) +	2 H_3O^+ =	I_2(aq) +	4 H_2O(ℓ)
État du système	avancement en mol	Quantités de matière en mol				
initial	$x = 0$	$1{,}0 \times 10^{-3}$	$6{,}0 \times 10^{-3}$	$3{,}0 \times 10^{-3}$	0	excès
intermédiaire	x	$1{,}0 \times 10^{-3} - x$	$6{,}0 \times 10^{-3} - 2x$	$3{,}0 \times 10^{-3} - 2x$	x	excès
final	x_f	0	$4{,}0 \times 10^{-3}$	$1{,}0 \times 10^{-3}$	$1{,}0 \times 10^{-3}$	excès

2.1.1 · Tableau d'évolution de l'annexe complété (en orange : ce que l'élève écrit)

2.1.2 L'état final est-il atteint à $t = 1200$ s ? Justifier à partir de la figure 1.

Sur la figure 1, l'absorbance n'augmente plus à partir de 900 s environ : la courbe présente un palier à $A \approx 0{,}94$.
Or A est proportionnelle à $[I_2]$ (loi de Beer-Lambert) : la concentration en diiode ne varie plus, il ne s'en forme plus.

Oui, l'état final est atteint à $t = 1200$ s (palier d'absorbance).

2.1.3 Montrer que, durant la transformation, le quotient de l'avancement x par l'absorbance A est constant.

Loi de Beer-Lambert : $A = k\,[I_2]$, avec k constante à la longueur d'onde choisie.
D'après le tableau, $n(I_2) = x$, donc $[I_2] = \dfrac{x}{V}$ avec $V = V_A + V_B + V_C$, volume constant du mélange.
Ainsi $A = \dfrac{k\,x}{V}$.

$\dfrac{x}{A} = \dfrac{V}{k}$: V et k étant constants, le quotient $\dfrac{x}{A}$ est constant.

2.1.4 Calculer ce quotient, noté r.

Données utiles $x_f = 1{,}0 \times 10^{-3}$ mol (2.1.1) ; absorbance finale lue sur la figure 1 : $A_f = 0{,}94$

Le quotient est constant : on le calcule dans l'état final, où x et A sont tous deux connus.

$$r = \frac{x_f}{A_f} = \frac{1{,}0 \times 10^{-3}}{0{,}94}$$

$r = 1{,}1 \times 10^{-3}$ mol

COMPRENDRE
L'absorbance est une grandeur sans unité : r s'exprime en mol, comme x.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$$\frac{1.0 \times 10^{-3}}{0.94} \approx 0.00106383$$

2.1.5 Établir l'expression de la vitesse de réaction v en fonction de r, du volume V et de la dérivée $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$.

Données utiles $v = \frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$

D'après 2.1.3, $x = r\,A$ avec r constant, donc $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = r\,\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$.

$$v = \frac{r}{V}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$$

COMPRENDRE
Aujourd'hui, on parle de vitesse volumique d'apparition du diiode, $\frac{\mathrm{d}[\mathrm{I}_2]}{\mathrm{d}t}$. Comme $[\mathrm{I}_2] = \frac{x}{V}$, c'est ici la même grandeur que v.

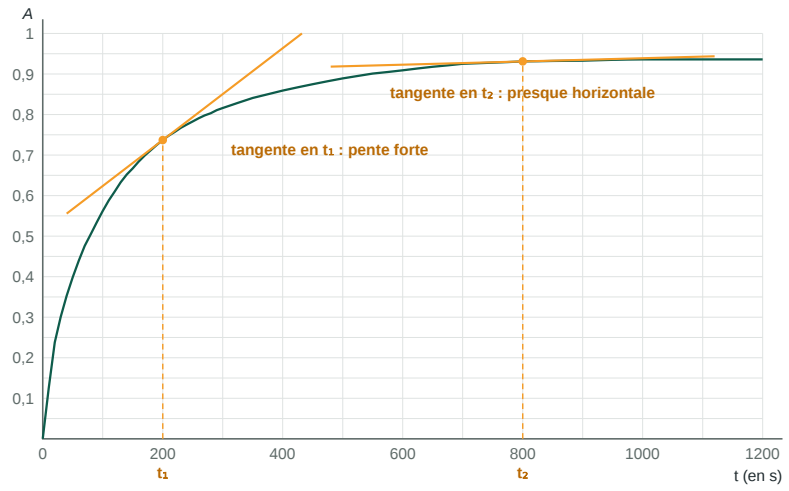
2.1.6 Comparer, sans les calculer, les vitesses volumiques de la réaction aux instants $t_1 = 200$ s et $t_2 = 800$ s. Faire apparaître la méthode utilisée sur la figure 1.

r et V sont constants et positifs : v est proportionnelle à $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$, c'est-à-dire au coefficient directeur de la tangente à la courbe $A = f(t)$ à la date considérée.

On trace les tangentes à la courbe en t_1 et en t_2 : la tangente en t_1 est nettement plus inclinée que la tangente en t_2, presque horizontale.

$v(t_1) > v(t_2)$: la vitesse volumique diminue au cours du temps.

COMPRENDRE
La vitesse diminue parce que les réactifs sont consommés : leur concentration, facteur cinétique, baisse au cours de la transformation.



2.1.6 · Figure 1 de l'annexe : tangentes à la courbe aux dates t₁ = 200 s et t₂ = 800 s (en orange)

2.1.7 Après avoir donné sa définition, déterminer, en justifiant par un tracé, la valeur du temps de demi-réaction.

Données utiles $A_f = 0{,}94$ (figure 1)

Le temps de demi-réaction $t_{1/2}$ est la durée au bout de laquelle l'avancement atteint la moitié de sa valeur finale : $x(t_{1/2}) = \frac{x_f}{2}$.

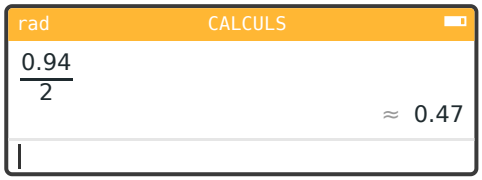
A étant proportionnelle à x (2.1.3), cela correspond à $A(t_{1/2}) = \frac{A_f}{2} = \frac{0{,}94}{2} = 0{,}47$.

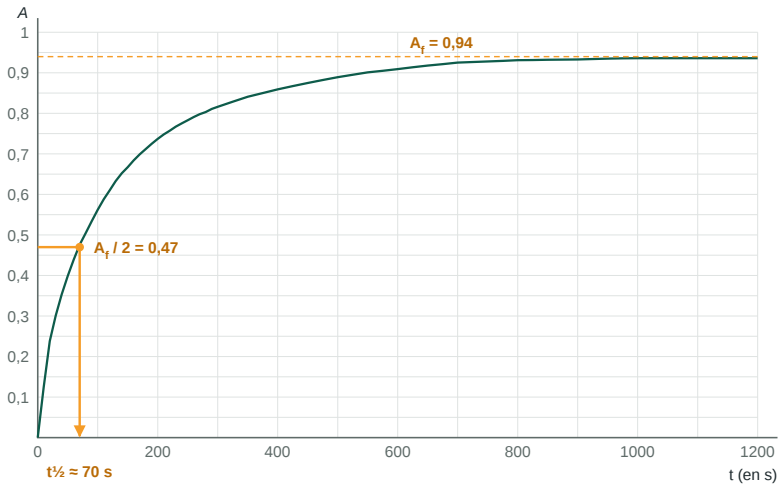
On repère sur la courbe le point d'ordonnée $0{,}47$ et on lit son abscisse.

$t_{1/2} \approx 70$ s

PIÈGE
Prendre la moitié de la durée totale de la transformation (ici environ 450 s). Le temps de demi-réaction se lit à partir de la moitié de l'ordonnée finale, pas de la moitié de l'abscisse.

À LA CALCULATRICE





2.1.7 · Figure 1 de l'annexe : lecture du temps de demi-réaction (en orange)

2.2.1 Deuxième expérience (30,0 mL de S_A, 30,0 mL de S_B, 10,0 mL de S_C, 30,0 mL d'eau distillée) : quel paramètre est modifié par rapport à l'expérience 1 ?

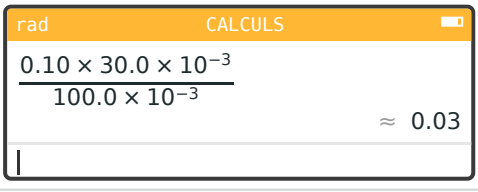
Le volume total est inchangé : $30{,}0 + 30{,}0 + 10{,}0 + 30{,}0 = 100{,}0$ mL.
Les quantités de H_3O^+ et de H_2O_2 sont les mêmes, donc leurs concentrations initiales aussi.

Seul le volume de S_B est divisé par deux : la quantité initiale d'ions iodure passe de $6{,}0 \times 10^{-3}$ mol à $3{,}0 \times 10^{-3}$ mol.

Le paramètre modifié est la concentration initiale en ions iodure, divisée par deux ($0{,}030\ \text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ au lieu de $0{,}060\ \text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$).

COMPRENDRE
L'eau distillée sert à garder le même volume total : ainsi un seul paramètre change entre les deux expériences, ce qui permet d'étudier son influence.

À LA CALCULATRICE



2.2.2 Le réactif limitant a-t-il changé ?

Données utiles $n_i(\mathrm{I^-}) = 3{,}0 \times 10^{-3}$ mol ; autres quantités initiales inchangées (2.1.1)

Pour les ions iodure : $3{,}0 \times 10^{-3} - 2x = 0$ donne $x = 1{,}5 \times 10^{-3}$ mol.

Les valeurs pour $\mathrm{H_2O_2}$ ($1{,}0 \times 10^{-3}$ mol) et $\mathrm{H_3O^+}$ ($1{,}5 \times 10^{-3}$ mol) sont inchangées : la plus petite reste celle de $\mathrm{H_2O_2}$.

Non : le réactif limitant est toujours $\mathrm{H_2O_2}$ et $x_f = 1{,}0 \times 10^{-3}$ mol.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$$\frac{0.10 \times 30.0 \times 10^{-3}}{2} \approx 0.0015$$

2.2.3 Comparer, en justifiant, les temps de demi-réaction des deux expériences.

La concentration d'un réactif est un facteur cinétique : plus elle est faible, plus la transformation est lente.

Dans l'expérience 2, la concentration initiale en ions iodure est deux fois plus faible, les autres conditions étant identiques : le diiode se forme moins vite, alors que l'avancement final est le même. Il faut donc plus de temps pour atteindre $\frac{x_f}{2}$.

$t_{1/2}$ (expérience 2) $> t_{1/2}$ (expérience 1)

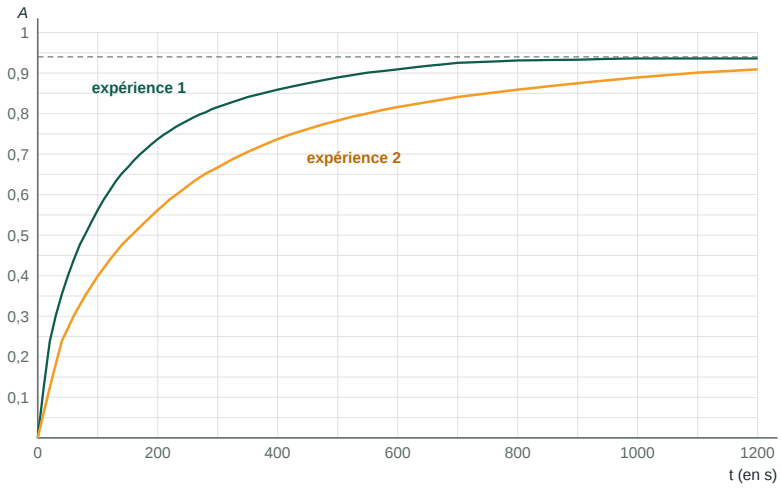
2.2.4 Sur la figure 1 de l'annexe, tracer l'allure de la courbe représentant l'évolution de l'absorbance en fonction du temps pour la deuxième expérience.

Même avancement final et même volume total : la concentration finale en diiode est la même, donc l'absorbance tend vers la même valeur $A_f = 0{,}94$.

La transformation est plus lente : la courbe part de l'origine avec une tangente moins inclinée et reste en dessous de celle de l'expérience 1.

Courbe tracée en orange : même valeur limite A_f, atteinte plus tardivement.

PIÈGE
Tracer une courbe qui plafonne plus bas. La valeur finale de A dépend de x_f et de V, qui n'ont pas changé ; seule la rapidité de l'évolution est modifiée.



2.2.4 · Figure 1 de l'annexe : allure de la courbe de la deuxième expérience (en orange)

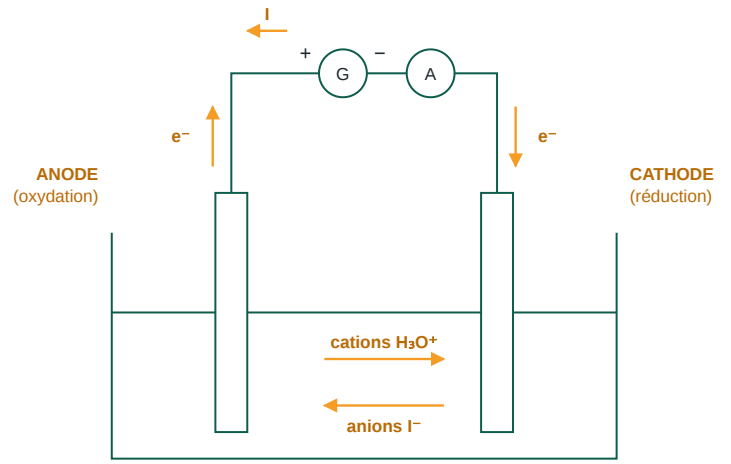
3.1 Compléter le schéma de la figure 2 en indiquant le sens de déplacement des différents porteurs de charge.

Le générateur impose le sens du courant : à l'extérieur du générateur, il circule de la borne $+$ vers la borne $-$.

- Dans les fils et les électrodes, les porteurs de charge sont les électrons : ils se déplacent en sens inverse du courant, de l'électrode de gauche vers la borne $+$, et de la borne $-$ vers l'électrode de droite.
- Dans la solution, les porteurs de charge sont les ions : les cations H_3O^+ se déplacent dans le sens du courant, vers l'électrode reliée à la borne $-$; les anions I^- en sens inverse, vers l'électrode reliée à la borne $+$.

Électrons dans les fils (de la borne $-$ vers l'électrode de droite), cations vers l'électrode reliée à la borne $-$, anions vers l'électrode reliée à la borne $+$.

PIÈGE
Faire circuler des électrons dans la solution. Les électrons ne se déplacent que dans les conducteurs métalliques ; dans la solution, le courant est assuré par les ions.



3.1 · Figure 2 de l'annexe complétée : déplacement des porteurs de charge (3.1) et nom des électrodes (3.3)

3.2 Écrire les équations électrochimiques modélisant les transformations susceptibles de se produire à chaque électrode.

Données utiles couples I_2/I^- ; O_2/H_2O ; H^+/H_2 ; espèces présentes : I^-, H_3O^+ (noté H^+), H_2O

Électrode reliée à la borne $+$: elle cède des électrons au circuit, il s'y produit une oxydation. Deux réducteurs sont présents, I^- et H_2O :

- $2\,I^-\,(aq) = I_2\,(aq) + 2\,e^-$
- $2\,H_2O\,(l) = O_2\,(g) + 4\,H^+\,(aq) + 4\,e^-$

Électrode reliée à la borne $-$: elle reçoit des électrons, il s'y produit une réduction. Le seul oxydant présent est H^+ :

- $2\,H^+\,(aq) + 2\,e^- = H_2\,(g)$

Borne $+$: oxydation de I^- ou de H_2O ; borne $-$: réduction de H^+ en H_2.

MÉTHODE
Lister les espèces réellement présentes au départ, puis chercher parmi elles les réducteurs (oxydables du côté de la borne $+$) et les oxydants (réductibles du côté de la borne $-$).

3.3 Identifier l'anode et la cathode sur la figure 2. Sachant qu'il n'y a pas de dégagement gazeux à l'anode, donner la nature des produits obtenus à chaque électrode.

L'anode est l'électrode où se produit l'oxydation : c'est celle reliée à la borne $+$ du générateur (à gauche). La cathode, siège de la réduction, est reliée à la borne $-$ (à droite). Elles sont repérées sur le schéma de la question 3.1.

À l'anode, aucun gaz ne se dégage : il ne se forme pas de dioxygène, ce sont donc les ions iodure qui sont oxydés.

Anode (borne $+$) : diiode $\mathrm{I_2\,(aq)}$; cathode (borne $-$) : dihydrogène $\mathrm{H_2\,(g)}$.

COMPRENDRE
Dans une électrolyse, l'anode est reliée à la borne $+$ du générateur, à l'inverse d'une pile où l'anode est le pôle $-$. La définition, elle, ne change pas : anode = oxydation, cathode = réduction.

3.4.1 Calculer la quantité d'électricité qui a traversé le circuit pendant l'électrolyse. En déduire la quantité de matière d'électrons correspondante.

Données utiles $I_G = 0{,}25$ A ; $\Delta t = 30$ min ; $F = 9{,}65 \times 10^4$ C · mol^{-1}

Quantité d'électricité : $Q = I_G\,\Delta t$ avec $\Delta t = 30 \times 60 = 1{,}8 \times 10^3$ s.

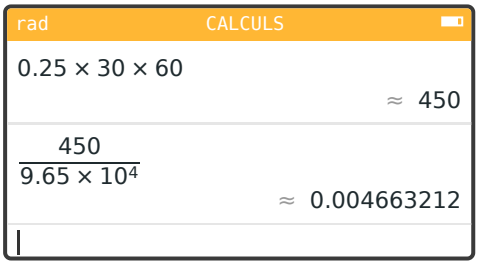
$$Q = 0{,}25 \times 1{,}8 \times 10^3 = 4{,}5 \times 10^2 \text{ C}$$

Quantité d'électrons : $Q = n(\mathrm{e^-})\,F$, donc $n(\mathrm{e^-}) = \dfrac{Q}{F} = \dfrac{4{,}5 \times 10^2}{9{,}65 \times 10^4}$.

$Q = 4{,}5 \times 10^2$ C et $n(\mathrm{e^-}) = 4{,}7 \times 10^{-3}$ mol

PIÈGE
Laisser la durée en minutes : dans $Q = I\,\Delta t$, l'intensité est en ampères et la durée en secondes.

À LA CALCULATRICE



3.4.2 Calculer le volume de gaz recueilli à la cathode.

Données utiles $V_M = 25$ L · mol^{-1} ; $n(\mathrm{e^-}) = \dfrac{Q}{F}$ avec $Q = 4{,}5 \times 10^2$ C (3.4.1)

À la cathode : $\mathrm{2\,H^+\,(aq) + 2\,e^- = H_2\,(g)}$. Il faut deux moles d'électrons pour former une mole de dihydrogène :

$$n(\mathrm{H_2}) = \frac{n(\mathrm{e^-})}{2} = \frac{Q}{2F}$$

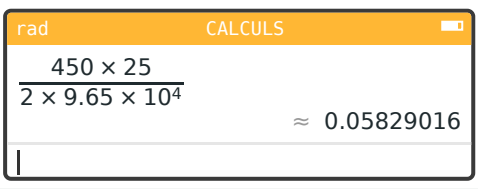
$$V(\mathrm{H_2}) = n(\mathrm{H_2})\,V_M = \frac{Q\,V_M}{2F} = \frac{4{,}5 \times 10^2 \times 25}{2 \times 9{,}65 \times 10^4} = 5{,}8 \times 10^{-2} \text{ L}$$

$V(\mathrm{H_2}) = 5{,}8 \times 10^{-2}$ L, soit environ 58 mL de dihydrogène.

PIÈGE
Oublier le facteur 2 entre électrons et dihydrogène, ce qui double le volume. Garder la valeur non arrondie de $n(\mathrm{e^-})$ dans le calcul.

COMPRENDRE
Les 100,0 mL de solution contiennent $5{,}0 \times 10^{-3}$ mol d'ions $\mathrm{H_3O^+}$: c'est un peu plus que les $4{,}7 \times 10^{-3}$ mol nécessaires, l'électrolyse peut donc durer 30 minutes.

À LA CALCULATRICE



Système d'allumage classique dans un moteur à essence

Bac S 2007 Métropole rattrapage (ancien programme) · Exercice 2 **5,5 points** **Durée conseillée 1 h 05**

1.1.1 Rupteur fermé (figure 4) : montrer que l'intensité i_1 vérifie $\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \dfrac{r}{L}\,i_1 = \dfrac{E}{L}$.

Loi d'additivité des tensions dans la maille : $E = u_r + u_L$.

Loi d'Ohm : $u_r = r\,i_1$. Bobine d'inductance pure : $u_L = L\,\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$.

Donc $E = r\,i_1 + L\,\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$, puis on divise par L :

$$\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{r}{L}\,i_1 = \frac{E}{L}$$

PIÈGE
Les flèches u_r et u_L sont opposées au sens de i_1 (convention récepteur) : les deux relations s'écrivent sans signe moins.

COMPRENDRE
La bobine et le circuit RL ne figurent plus au programme actuel de spécialité. La démarche reste celle du circuit RC : loi des mailles, relation propre à chaque dipôle, puis équation différentielle du premier ordre.

1.1.2 Que devient cette équation différentielle en régime permanent ?

En régime permanent, l'intensité ne varie plus : $i_1 = I_1$ constante, donc $\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = 0$.

L'équation devient $\dfrac{r}{L}\,I_1 = \dfrac{E}{L}$, soit $r\,I_1 = E$.

COMPRENDRE
En régime permanent, $u_L = 0$: la bobine idéale se comporte comme un simple fil, seule la résistance r limite le courant.

1.1.3 En déduire la valeur de l'intensité I_1 du courant dans le circuit primaire en régime permanent.

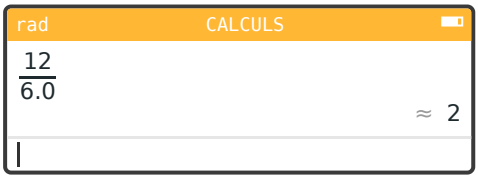
Données utiles $E = 12$ V ; $r = 6{,}0\ \Omega$

$$I_1 = \frac{E}{r} = \frac{12}{6{,}0}$$

$$I_1 = 2{,}0 \text{ A}$$

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme E et r : on écrit $2{,}0$ A et non 2 A.

À LA CALCULATRICE



1.1.4 Peut-il y avoir une étincelle aux bornes de la bougie en régime permanent ? Justifier.

En régime permanent, $\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = 0$, donc $u_2 = \alpha\,\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = 0$ V.

Or l'étincelle exige $|u_2| > 10\,000$ V.

Non : en régime permanent $u_2 = 0$ V, aucune étincelle ne peut jaillir aux bornes de la bougie.

COMPRENDRE
Ce n'est pas la valeur du courant qui crée la tension u_2, mais sa variation. Un courant de $2{,}0$ A constant ne produit rien au secondaire.

1.2.1 Rupteur ouvert (figure 5) : quel est l'effet de la bobine sur la rupture du courant ?

Une bobine s'oppose aux variations de l'intensité du courant qui la traverse.

La bobine retarde la rupture du courant : i_1 ne s'annule pas instantanément, il décroît de façon continue à partir de I_1.

COMPRENDRE
L'intensité dans une bobine ne peut pas subir de discontinuité. Le courant continue donc de circuler juste après l'ouverture, à travers l'air devenu conducteur : c'est l'étincelle au rupteur.

1.2.2 Parmi les figures 6.a, 6.b et 6.c, choisir en justifiant la seule compatible avec l'expression donnée de $i_1(t)$.

Données utiles $i_1(t) = \dfrac{E}{R+r} + \left(I_1 - \dfrac{E}{R+r}\right) \mathrm{e}^{-t/\tau}$; $I_1 = 2{,}0$ A (1.1.3) ; R de plusieurs mégaohms

À $t = 0$: $\mathrm{e}^0 = 1$, donc $i_1(0) = I_1$, valeur non nulle. La figure 6.b, qui part de zéro, est exclue.

Quand t devient grand : $\mathrm{e}^{-t/\tau} \to 0$, donc $i_1 \to \dfrac{E}{R+r}$, valeur très faible mais non nulle, bien inférieure à $I_1 = \dfrac{E}{r}$ car $R + r \gg r$.

L'intensité décroît donc de I_1 vers cette limite selon une exponentielle. La figure 6.c est une droite (fonction affine) qui atteint zéro : elle est exclue.

Seule la figure 6.a convient : décroissance exponentielle de I_1 vers la valeur faible $\dfrac{E}{R+r}$.

MÉTHODE
Pour identifier la courbe d'une fonction exponentielle, tester trois choses : la valeur à $t = 0$, la limite quand t tend vers l'infini, et la forme (courbe à asymptote, pas un segment de droite).

1.2.3 À partir de la courbe $|u_2(t)|$ de la figure 7 de l'annexe, déterminer la valeur de la constante de temps τ.

Données utiles $u_2 = \alpha \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$; expression de $i_1(t)$ (1.2.2)

On dérive $i_1(t)$: $\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{\tau}\left(I_1 - \dfrac{E}{R+r}\right) \mathrm{e}^{-t/\tau}$, donc

$$|u_2(t)| = |u_2(0)|\ \mathrm{e}^{-t/\tau}$$

À la date $t = \tau$: $|u_2(\tau)| = |u_2(0)| \times \mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}37 \times |u_2(0)|$.

Lecture de la figure 7 : $|u_2(0)| = 15\,000$ V, donc $|u_2(\tau)| = 15\,000 \times \mathrm{e}^{-1} \approx 5{,}5 \times 10^3$ V.

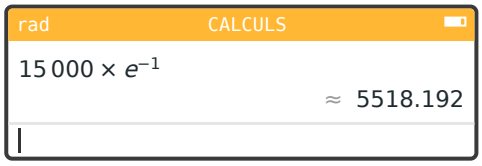
L'abscisse du point de la courbe d'ordonnée $5\,500$ V est $2{,}0$ ms.

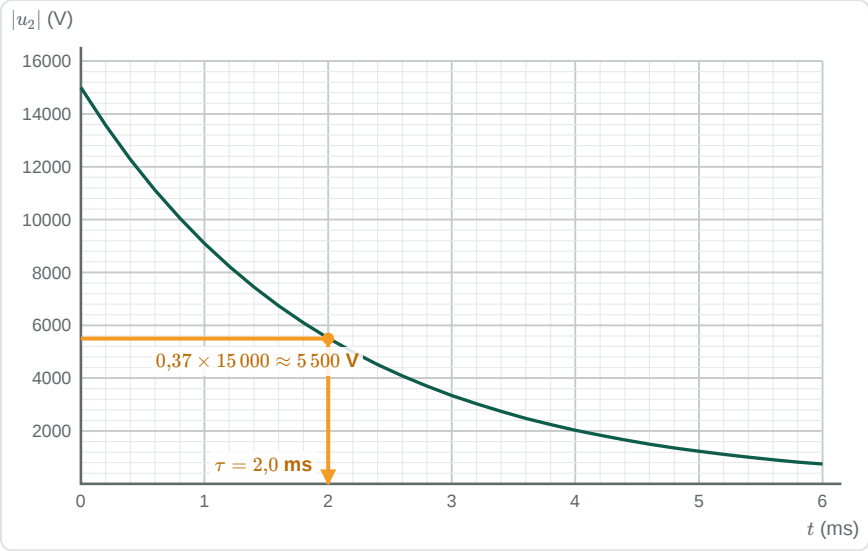
$\tau = 2{,}0$ ms

COMPRENDRE
i_1 décroît, donc u_2 est négative : c'est pourquoi le sujet trace sa valeur absolue.

MÉTHODE
Pour une exponentielle décroissante vers zéro, τ est la date où la grandeur vaut 37 % de sa valeur initiale. Autre possibilité : la tangente à l'origine coupe l'axe des abscisses à $t = \tau$.

À LA CALCULATRICE





1.2.3 · Figure 7 de l'annexe complétée : lecture de la constante de temps

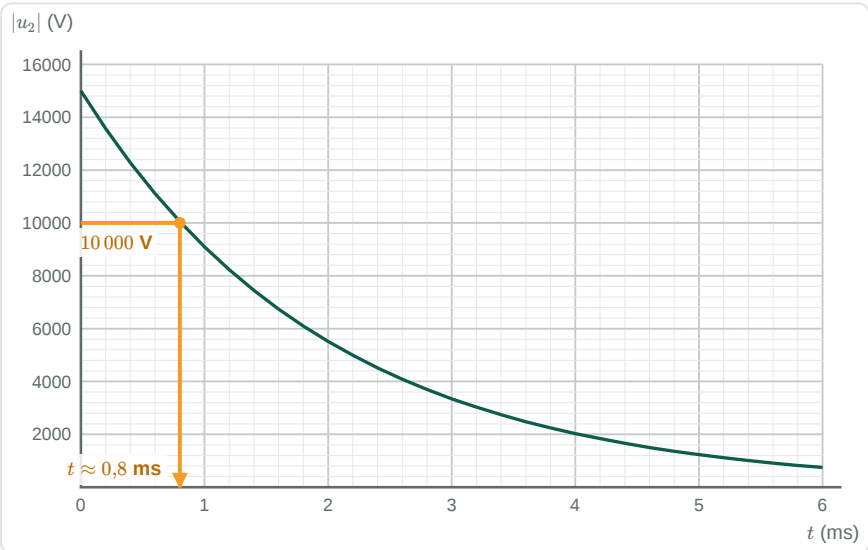
1.2.4 À partir de quelle date peut-on considérer qu'il n'y a plus d'étincelle aux bornes de la bougie ?

Données utiles étincelle si $|u_2| > 10\,000$ V

L'étincelle existe tant que $|u_2| > 10\,000$ V. Sur la figure 7, la courbe passe par l'ordonnée 10 000 V à l'abscisse $t \approx 0{,}8$ ms, puis reste en dessous.

Il n'y a plus d'étincelle à partir de $t \approx 0{,}8$ ms.

COMPRENDRE
Sans condensateur, la bougie ne donne donc qu'une seule étincelle, très brève, et le rupteur subit lui aussi une étincelle qui l'use.



1.2.4 · Figure 7 : date à laquelle la tension repasse sous 10 000 V

2.1.1 Bobine idéale ($r = 0$) : donner l'expression littérale de l'intensité $i_1 = \dfrac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}$.

Données utiles $q(t) = Q_0 \cos\left(\dfrac{2\pi}{\gamma}\, t\right) + C\,E$

On dérive $q(t)$ par rapport au temps ; le terme $C\,E$ est constant, sa dérivée est nulle.

$$i_1(t) = -\frac{2\pi}{\gamma}\, Q_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\gamma}\, t\right)$$

PIÈGE
Oublier le facteur $\dfrac{2\pi}{\gamma}$: la dérivée de $\cos(\omega t)$ est $-\omega \sin(\omega t)$, pas $-\sin(\omega t)$.

2.1.2 Donner l'expression littérale de $\frac{\mathrm{d}^2q(t)}{\mathrm{d}t^2}$.

On dérive $i_1(t)$ une nouvelle fois :

$$\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} = -\left(\frac{2\pi}{\gamma}\right)^2 Q_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\gamma}t\right)$$

2.1.3 En remplaçant dans l'équation (2), montrer que $q(t)$ est solution si et seulement si $\gamma = 2\pi\sqrt{LC}$.

Données utiles équation (2) : $\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{q}{LC} = \frac{E}{L}$

On remplace dans le membre de gauche de (2) :

$$-\frac{4\pi^2}{\gamma^2} Q_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\gamma}t\right) + \frac{Q_0}{LC}\cos\left(\frac{2\pi}{\gamma}t\right) + \frac{CE}{LC} = \frac{E}{L}$$

Comme $\frac{CE}{LC} = \frac{E}{L}$, il reste :

$$Q_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\gamma}t\right)\left(\frac{1}{LC} - \frac{4\pi^2}{\gamma^2}\right) = 0$$

Cette égalité doit être vraie à toute date t, avec $Q_0 > 0$: il faut et il suffit que $\frac{1}{LC} = \frac{4\pi^2}{\gamma^2}$, soit $\gamma^2 = 4\pi^2 LC$.

$\gamma = 2\pi\sqrt{LC}$ (γ positif)

PIÈGE
Diviser par $\cos\left(\frac{2\pi}{\gamma}t\right)$ sans précaution : le cosinus s'annule à certaines dates. L'argument correct est « égalité vraie pour tout t », ce qui impose que la parenthèse soit nulle.

2.1.4 Que représente γ pour ce circuit ?

La fonction $\cos\left(\frac{2\pi}{\gamma}t\right)$ reprend la même valeur chaque fois que t augmente de γ.

γ est la période propre $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$ des oscillations électriques du circuit LC ; elle s'exprime en secondes.

COMPRENDRE
Les oscillations électriques des circuits LC et RLC ne sont plus au programme actuel de spécialité. À l'époque, l'expression de la période propre était à connaître.

2.1.5 En utilisant la réponse à la question 2.1.2, montrer que $u_2(t) = -A\cos\left(\frac{2\pi}{\gamma}t\right)$ où A est une constante positive.

Données utiles $u_2 = \alpha\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$; $\gamma = 2\pi\sqrt{LC}$ (2.1.3)

Comme $i_1 = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$: $u_2 = \alpha\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = \alpha\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} = -\alpha\left(\frac{2\pi}{\gamma}\right)^2 Q_0\cos\left(\frac{2\pi}{\gamma}t\right)$

Avec $\left(\frac{2\pi}{\gamma}\right)^2 = \frac{1}{LC}$, on pose $A = \frac{\alpha Q_0}{LC}$. Les grandeurs α, Q_0, L et C sont positives et constantes, donc A aussi.

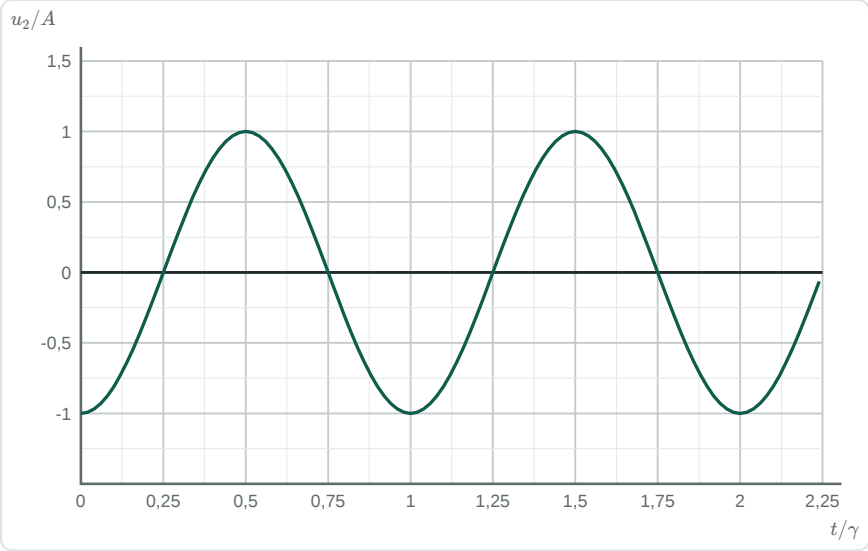
$u_2(t) = -A\cos\left(\frac{2\pi}{\gamma}t\right)$ avec $A = \frac{\alpha Q_0}{LC} > 0$

2.1.6 Tracer l'allure de la variation de la tension $u_2(t)$ en fonction du temps et qualifier le régime observé.

À $t = 0$: $u_2(0) = -A$. La tension oscille ensuite entre $-A$ et $+A$, avec une amplitude constante et une période γ (voir le tracé).

Régime périodique : oscillations sinusoïdales non amorties.

PIÈGE
Faire partir la courbe de $+A$ ou de zéro. Le signe moins impose un départ à $-A$, avec une tangente horizontale ; la tension s'annule à $t = \gamma/4$.



2.1.6 · Allure de $u_2(t)$: sinusoïde de période γ partant de $-A$

2.2.1 Cas $r \neq 0$ (figure 9) : qualifier le régime observé et expliquer pourquoi l'amplitude de $u_2(t)$ décroît au cours du temps.

La tension oscille autour de zéro avec une amplitude qui diminue : le régime est pseudo-périodique (oscillations amorties).

La résistance r de la bobine n'est pas nulle. À chaque échange d'énergie entre le condensateur et la bobine, une partie de l'énergie du circuit est dissipée par effet Joule dans r, sous forme de transfert thermique.

> Régime pseudo-périodique ; l'amplitude décroît car l'énergie du circuit est peu à peu dissipée par effet Joule dans la résistance r.

PIÈGE
Écrire « régime périodique » : la courbe ne se reproduit pas identique à elle-même. Le mot attendu est « pseudo-périodique », et la cause doit être nommée : l'effet Joule.

2.2.2 Expliquer, grâce à la figure 9, pourquoi en présence du condensateur il y a un « train d'étincelles » aux bornes de la bougie plutôt qu'une étincelle unique.

Données utiles étincelle si $|u_2| > 10\,000$ V

Une étincelle jaillit chaque fois que $|u_2|$ dépasse $10\,000$ V. Sur la figure 9, la tension oscille et franchit ce seuil plusieurs fois : au voisinage de $t = 0$ ($u_2 \approx -15\,000$ V), puis vers 2 ms ($\approx +14\,000$ V), vers 4 ms et vers 6 ms (extremums légèrement au-delà de $10\,000$ V en valeur absolue).

Ensuite l'amplitude reste inférieure à $10\,000$ V : plus d'étincelle.

> La tension oscillante dépasse quatre fois le seuil de $10\,000$ V en valeur absolue : il y a quatre étincelles successives, un « train d'étincelles », au lieu d'une seule.

COMPRENDRE
Le signe de u_2 n'a pas d'importance : les extremums négatifs comptent autant que les positifs. Le condensateur protège le rupteur et améliore l'allumage.

Spécialité : Petite histoire d'une lentille et de deux miroirs

Bac S 2007 Métropole rattrapage (ancien programme) · Exercice 3 **4 points** **Durée conseillée 52 min**

1.1 Compléter les figures 10 et 11 de l'annexe en construisant l'image A'B' du visage AB donnée par un miroir plan puis par un miroir sphérique. En déduire lequel des miroirs M_1 et M_2 est sphérique.

Figure 10 : l'image A'B' est le symétrique de AB par rapport au plan du miroir. Elle est virtuelle, droite et de même taille que l'objet.

Figure 11 : on trace deux rayons issus de B. Celui qui arrive parallèlement à l'axe se réfléchit en passant par F ; celui dont le support passe par C revient sur lui-même. Les rayons réfléchis divergent : ce sont leurs prolongements qui se coupent en B', derrière le miroir. L'image est virtuelle, droite et plus grande que l'objet.

Clémentine voit une image de même taille dans M_2 et une image agrandie dans M_1.

M_1 est le miroir sphérique ; M_2 est le miroir plan.

PIÈGE
Sur la figure 11, l'objet est placé entre F et S : inutile de chercher un point de rencontre des rayons devant le miroir. Les prolongements se tracent en pointillés, comme l'image virtuelle.

MÉTHODE
Miroir sphérique, trois rayons utiles : parallèle à l'axe, il repart par F ; passant par F, il repart parallèle à l'axe ; passant par C, il revient sur lui-même. Deux suffisent.

Figure 10 : miroir plan

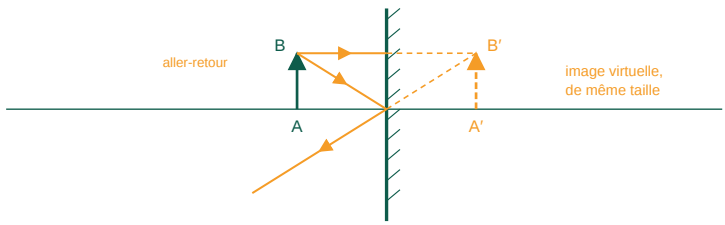
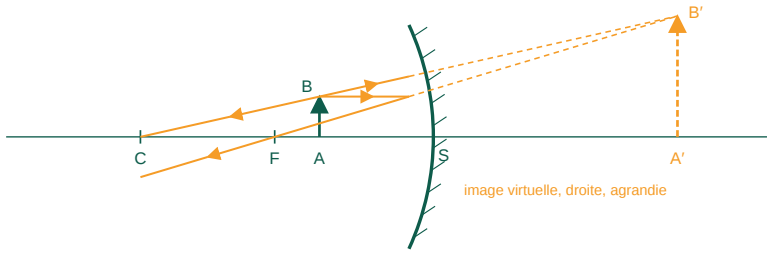


Figure 11 : miroir sphérique



1.1 · Annexe complétée : figures 10 et 11

1.2 Pourquoi Clémentine ne choisit-elle pas un écran entier pour observer les images ? Déduire de son expérience la distance focale du miroir sphérique, en justifiant.

Données utiles miroir placé plusieurs mètres à droite de la lampe ; image nette pour une distance écran-miroir de 90 cm

L'écran est placé entre la lampe et le miroir. Entier, il arrêterait toute la lumière émise par la lampe : aucun rayon n'atteindrait le miroir et aucune image ne se formerait. Le demi-écran laisse passer une partie du faisceau incident et reçoit la lumière réfléchie.

La lampe est à plusieurs mètres du miroir : cette distance est grande devant 90 cm, l'objet peut être considéré comme à l'infini. Son image se forme alors dans le plan focal du miroir, et la distance écran-miroir est égale à la distance focale.

$f_1 = SF = 90$ cm

COMPRENDRE
Le résultat garde les deux chiffres significatifs de la mesure. « À l'infini » est une approximation : elle est d'autant meilleure que la lampe est éloignée du miroir.

2.1 Placer à l'échelle, sur la figure 12 de l'annexe, la lentille L et l'écran. En déduire par construction la position des foyers F et F' de la lentille.

Données utiles objet GH de 2,0 cm ; lentille de diamètre 5,0 cm placée 6,0 cm à droite de GH ; écran 3,0 cm à droite de la lentille

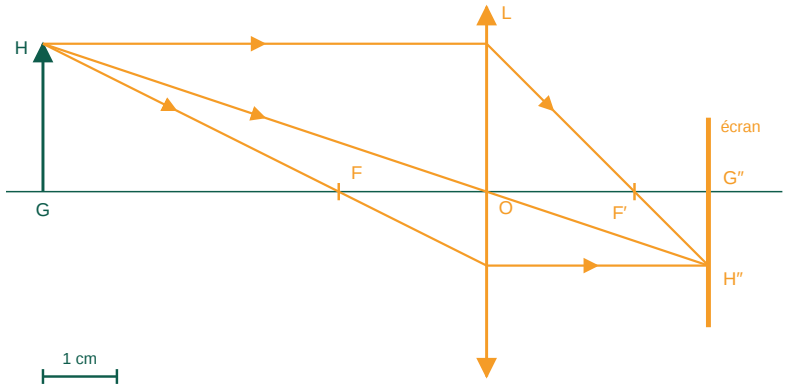
L'objet GH mesure 2,0 cm : il donne l'échelle du schéma. On place O à 6,0 cm de G, la lentille (2,5 cm de part et d'autre de l'axe), puis l'écran à 3,0 cm de O.

- Le rayon issu de H passant par O n'est pas dévié : il coupe l'écran en H''.
- Le rayon issu de H parallèle à l'axe émerge en passant par H'' : il coupe l'axe en F'.
- Le rayon qui émerge parallèlement à l'axe en passant par H'' provient de H en passant par F.

On lit $OF = OF' = 2{,}0$ cm : F et F' sont symétriques par rapport à O.

PIÈGE
La figure est à l'échelle : les distances se reportent à la règle à partir de la hauteur de GH. Tracer d'abord le rayon passant par O, lui seul fixe H'' sur l'écran.

Figure 12 (à l'échelle)



2.1 · Annexe complétée : figure 12, à l'échelle (objet de 2,0 cm)

2.2 Déterminer l'expression littérale de la distance focale image $\overline{OF'}$ de la lentille L puis calculer sa valeur.

Données utiles $\overline{OG} = -6{,}0$ cm ; $\overline{OG''} = +3{,}0$ cm

Relation de conjugaison : $\dfrac{1}{\overline{OG''}} - \dfrac{1}{\overline{OG}} = \dfrac{1}{\overline{OF'}}$

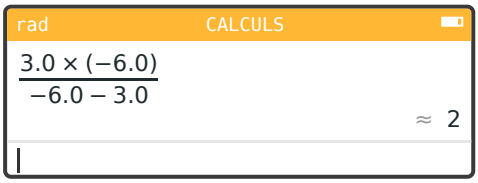
En réduisant au même dénominateur : $\dfrac{\overline{OG} - \overline{OG''}}{\overline{OG''} \times \overline{OG}} = \dfrac{1}{\overline{OF'}}$, soit

$$\overline{OF'} = \frac{\overline{OG''} \times \overline{OG}}{\overline{OG} - \overline{OG''}} = \frac{3{,}0 \times (-6{,}0)}{-6{,}0 - 3{,}0}$$

$\overline{OF'} = 2{,}0$ cm, en accord avec la construction.

PIÈGE
Les grandeurs sont algébriques : l'objet est avant la lentille, donc $\overline{OG}$ est négatif. Avec $+6{,}0$ cm, on obtiendrait $6{,}0$ cm, contredit par la figure.

À LA CALCULATRICE



3.1 Dans le télescope remonté, quel élément joue le rôle de l'objectif ? Lequel joue le rôle de l'oculaire ? Quel est le rôle du troisième élément ?

Le miroir sphérique M_1 reçoit la lumière de l'astre et en forme une première image : c'est l'objectif.

La lentille L, devant laquelle on place l'œil, sert à observer cette image : c'est l'oculaire.

Le miroir plan M_2 renvoie le faisceau sur le côté du tube, vers l'oculaire. L'image qu'il donne de celle de l'objectif sert d'objet pour L ; l'observation se fait ainsi perpendiculairement à l'axe de M_1.

Objectif : M_1 ; oculaire : L ; M_2 dévie la lumière vers l'oculaire.

COMPRENDRE
Sans M_2, l'image de l'objectif se formerait devant M_1, sur le trajet de la lumière incidente : l'observateur devrait se placer là et masquerait l'astre.

3.2.1 Sans souci d'échelle, construire sur la figure 13 l'image K_1N_1 de la Lune KN donnée par le miroir M_1.

La Lune est à l'infini : son image par M_1 est dans le plan focal du miroir. K est sur l'axe, donc K_1 est confondu avec F_1.

Tous les rayons issus de N sont parallèles à la direction indiquée. Celui qui passe par F_1 se réfléchit parallèlement à l'axe : il coupe le plan focal en N_1.

K_1N_1 est dans le plan focal de M_1, avec K_1 en F_1 (figure en 3.3.1).

COMPRENDRE
K_1N_1 est une image intermédiaire : dans le télescope, M_2 intercepte la lumière avant qu'elle ne s'y forme. On la trace en pointillés pour construire la suite.

3.2.2 Sans souci d'échelle, placer sur la figure 13 l'image K_2N_2 de K_1N_1 donnée par le miroir M_2.

Un miroir plan donne d'un objet une image symétrique par rapport à son plan, de même taille. M_2 est incliné à 45° : K_2, symétrique de K_1, est sur l'axe de la lentille et K_2N_2 est perpendiculaire à cet axe.

K_2N_2 est le symétrique de K_1N_1 par rapport à M_2, et $K_2N_2 = K_1N_1$.

3.2.3 Clémentine a-t-elle correctement placé la lentille L pour que le télescope soit effectivement afocal ?

Le télescope est afocal si l'image finale est à l'infini : l'objet K_2N_2 de la lentille doit se trouver dans son plan focal objet.

Sur la figure 13, F_1 et F sont à la même distance du centre de M_2 : F est le symétrique de F_1 par rapport à M_2. Donc K_2 est en F.

Oui : K_2N_2 est dans le plan focal objet de L, le télescope est afocal.

MÉTHODE
Instrument afocal : le foyer image de l'objectif (ici son symétrique par le miroir plan) coïncide avec le foyer objet de l'oculaire.

3.2.4 Sans souci d'échelle, construire sur la figure 13 l'image définitive K_3N_3 de K_2N_2, objet pour la lentille L.

K_2N_2 est dans le plan focal objet de L : tous les rayons issus de N_2 émergent parallèles entre eux. Leur direction est celle du rayon N_2O, qui n'est pas dévié. Le rayon issu de N_2 parallèle à l'axe de L émerge en passant par F' : il est bien parallèle à N_2O.

K_3N_3 est à l'infini : K_3 dans la direction de l'axe de L, N_3 dans la direction N_2O.

COMPRENDRE
Une image à l'infini s'observe sans accommoder : l'œil ne se fatigue pas. C'est l'intérêt du réglage afocal.

3.3.1 Placer sur la figure 13 les diamètres apparents α et α'. Démontrer que le grossissement du télescope est $G = \dfrac{f_{\text{objectif}}}{f_{\text{oculaire}}}$.

Données utiles $G = \dfrac{\alpha'}{\alpha}$

α est l'angle entre l'axe de M_1 et les rayons issus de N ; α' est l'angle entre l'axe de L et les rayons qui émergent vers N_3.

Le rayon passant par F_1 atteint le miroir à la hauteur K_1N_1 au-dessous de l'axe, à la distance f_{objectif} de F_1 : $\tan\alpha = \dfrac{K_1N_1}{f_{\text{objectif}}}$.

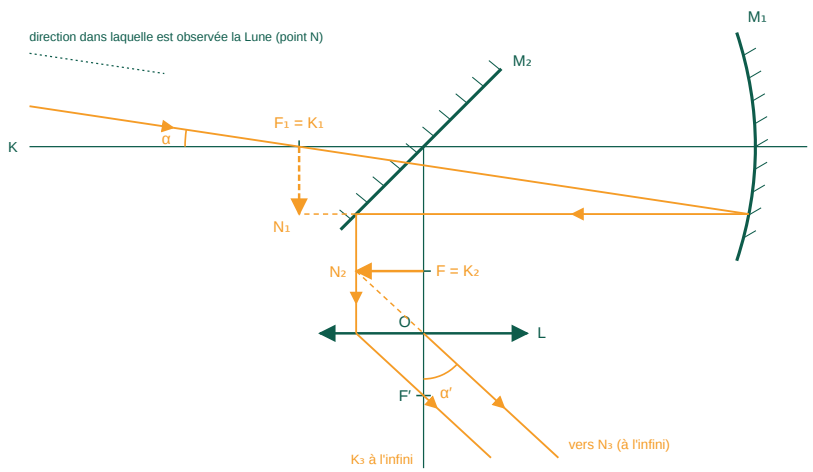
Dans le triangle OK_2N_2, rectangle en K_2 avec $OK_2 = OF$: $\tan\alpha' = \dfrac{K_2N_2}{f_{\text{oculaire}}}$.

Les angles sont petits (en radians, $\tan\alpha \approx \alpha$) et $K_2N_2 = K_1N_1$ (miroir plan), donc

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{K_2N_2}{f_{\text{oculaire}}} \times \frac{f_{\text{objectif}}}{K_1N_1}$$

$$\boxed{G = \frac{f_{\text{objectif}}}{f_{\text{oculaire}}}}$$

PIÈGE
L'approximation $\tan\alpha \approx \alpha$ doit être écrite, avec sa condition : angles petits et exprimés en radians. Sur le schéma, les angles sont exagérés pour rester lisibles.



3.3.1 · Annexe complétée : figure 13 (questions 3.2.1, 3.2.2, 3.2.4 et 3.3.1)

3.3.2 Calculer la valeur du grossissement du télescope de Clémentine. L'image définitive de la Lune est-elle nette ?

Données utiles $f_{\text{objectif}} = 90$ cm (1.2) ; $f_{\text{oculaire}} = 2{,}0$ cm (2.2) ; diamètre de l'objectif : 12 cm ; grossissement maximal : 2,5 fois le diamètre de l'objectif en mm

$G = \dfrac{f_{\text{objectif}}}{f_{\text{oculaire}}} = \dfrac{90}{2{,}0} = 45$ (les deux distances dans la même unité).

Diamètre de l'objectif : 12 cm = 120 mm, d'où $G_{\max} = 2{,}5 \times 120 = 3{,}0 \times 10^2$.

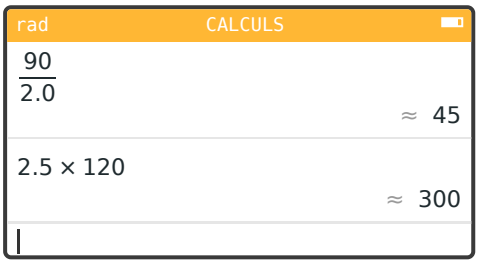
$G < G_{\max}$: les taches de diffraction ne sont pas visibles.

$G = 45$, inférieur à $G_{\max} = 3{,}0 \times 10^2$: l'image de la Lune est nette.

PIÈGE

Le diamètre doit être converti en millimètres : avec 12, on trouverait $G_{\max} = 30$ et l'on conclurait à tort que l'image est floue.

À LA CALCULATRICE



Des lois de Kepler à l'étude d'un astéroïde

Bac S 2007 Métropole rattrapage (ancien programme) · Exercice 4 **4 points** **Durée conseillée 52 min**

1.1.1 En utilisant une des lois de Kepler, justifier la position du Soleil indiquée sur la figure 10.

Première loi de Kepler (loi des orbites) : dans le référentiel héliocentrique, le centre d'une planète décrit une ellipse dont le centre du Soleil occupe l'un des foyers.

Le Soleil est donc placé en un foyer de l'ellipse, ici F_1, et non au centre O.

COMPRENDRE
L'autre foyer F_2 est vide. Pour une orbite circulaire, les deux foyers sont confondus avec le centre : le cercle est une ellipse particulière.

1.1.2 Les durées de parcours de M_1 à M_1' et de M_2 à M_2' sont égales. En utilisant une des lois de Kepler, trouver la relation entre les aires hachurées A_1 et A_2.

Deuxième loi de Kepler (loi des aires) : le segment reliant le centre du Soleil au centre de la planète balaie des aires égales pendant des durées égales.

Les deux parcours ont la même durée, donc :

$$A_1 = A_2$$

1.1.3 La vitesse moyenne entre M_1 et M_1' est-elle inférieure, égale ou supérieure à celle entre M_2 et M_2' ? Justifier.

Sur une même durée Δt : $v_1 = \dfrac{M_1M_1'}{\Delta t}$ et $v_2 = \dfrac{M_2M_2'}{\Delta t}$.

Sur la figure 10, la portion de trajectoire M_1M_1' est plus courte que la portion M_2M_2'.

$v_1 < v_2$: la vitesse moyenne entre M_1 et M_1' est inférieure à celle entre M_2 et M_2'.

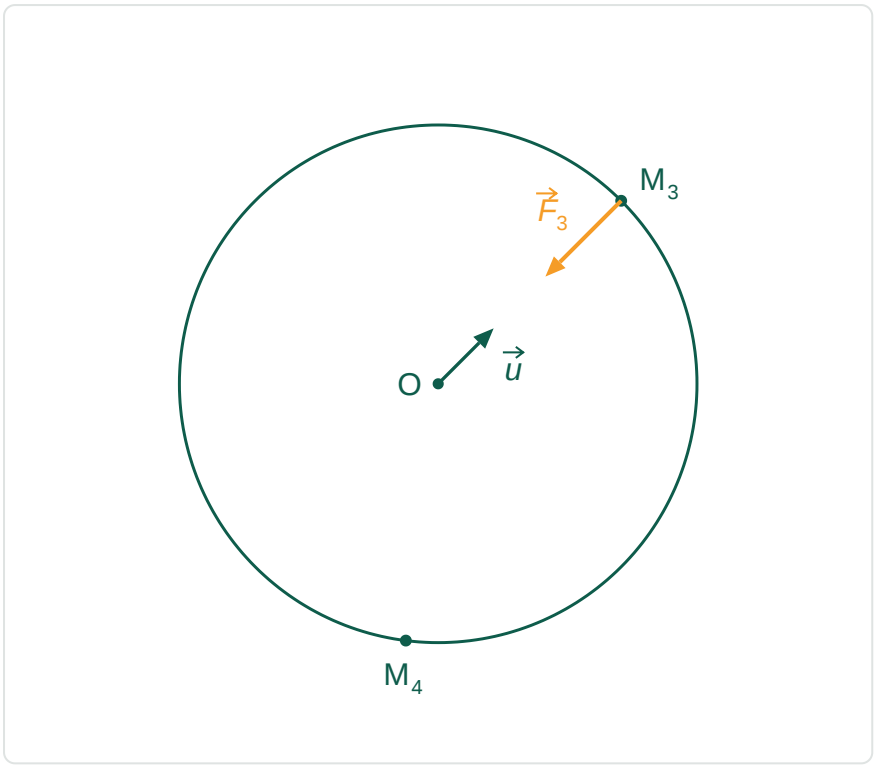
COMPRENDRE
Loin du Soleil, le secteur balayé est long et étroit : pour une même aire, l'arc parcouru est plus court. La planète est donc plus rapide près du Soleil et plus lente loin de lui.

1.2.1 Représenter sur la figure 11 de l'annexe la force de gravitation $\vec{F}_3$ exercée par le Soleil sur une planète de masse m située au point M_3.

La force $\vec{F}_3$ est attractive : son point d'application est M_3, sa direction est la droite (OM_3) et son sens va de M_3 vers O.

Flèche tracée depuis M_3, le long du rayon, pointant vers le Soleil O (voir figure).

PIÈGE
Faire partir la flèche de O : ce serait la force exercée par la planète sur le Soleil. La force subie par la planète s'applique en M_3.



1.2.1 · Figure 11 complétée : force de gravitation en M_3

1.2.2 Donner l'expression vectorielle de cette force au point M_3, en utilisant le vecteur unitaire $\vec{u}$.

Le vecteur $\vec{u}$ est dirigé de O vers M_3, la force est dirigée de M_3 vers O : elle est de sens opposé à $\vec{u}$. Sa valeur est $G\dfrac{m\,M_S}{r^2}$.

$$\vec{F}_3 = -\,G\frac{m\,M_S}{r^2}\,\vec{u}$$

PIÈGE
Oublier le signe « $-$ » : il traduit le caractère attractif de la force, de sens contraire à $\vec{u}$.

1.2.3 En citant la loi de Newton utilisée, déterminer l'expression du vecteur accélération $\vec{a}_3$ du centre d'inertie d'une planète de masse m située au point M_3.

Système {planète}, de masse m constante ; référentiel héliocentrique supposé galiléen ; seule force prise en compte : $\vec{F}_3$.

Deuxième loi de Newton : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\,\vec{a}_3$, soit $-\,G\dfrac{m\,M_S}{r^2}\,\vec{u} = m\,\vec{a}_3$.

En simplifiant par m :

$$\vec{a}_3 = -\,G\frac{M_S}{r^2}\,\vec{u}$$

COMPRENDRE
La masse m de la planète a disparu : sur une orbite de rayon donné, toutes les planètes auraient la même accélération, quelle que soit leur masse.

MÉTHODE
Toujours annoncer le système, le référentiel galiléen et le bilan des forces avant d'écrire la deuxième loi de Newton.

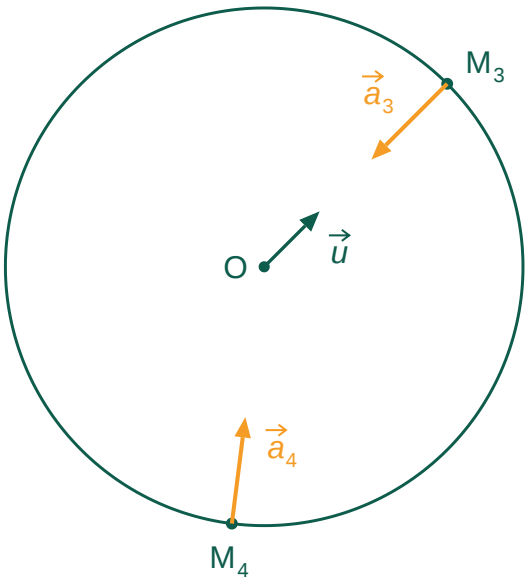
1.2.4 Représenter sur la figure 11 de l'annexe les vecteurs accélération $\vec{a}_3$ et $\vec{a}_4$ du centre d'inertie d'une planète aux points M_3 et M_4.

D'après 1.2.3, en tout point du cercle, l'accélération est portée par le rayon, dirigée vers O, de valeur $a = \dfrac{G\,M_S}{r^2}$.

Comme $OM_3 = OM_4 = r$, les deux vecteurs ont la même valeur.

$\vec{a}_3$ part de M_3 et $\vec{a}_4$ part de M_4 ; tous deux pointent vers O et ont la même longueur (voir figure).

PIÈGE
Dessiner deux flèches de longueurs différentes : même sans échelle imposée, les deux accélérations ont la même valeur et doivent avoir la même longueur.



1.2.4 · Figure 11 complétée : accélérations en M_3 et M_4, de même longueur

1.2.5 En déduire la nature du mouvement du centre d'inertie d'une planète quelconque de masse m du système solaire.

La trajectoire est un cercle de centre O. En chaque point, l'accélération est dirigée selon le rayon, vers le centre : elle n'a aucune composante tangente à la trajectoire.

Or la composante tangentielle de l'accélération vaut $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$: ici $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$, donc la valeur v de la vitesse est constante.

Le mouvement du centre d'inertie de la planète est **circulaire uniforme**.

PIÈGE
Écrire que le vecteur accélération est constant. Sa valeur est constante mais sa direction change à chaque instant ; c'est l'absence de composante tangentielle qui prouve l'uniformité.

1.2.6 Le graphe de la figure 12 représente le carré de la période de révolution de la Terre, de Mars et de Jupiter en fonction du cube du rayon de leur orbite. Est-il en accord avec la troisième loi de Kepler ?

Troisième loi de Kepler : pour toutes les planètes du système solaire, le rapport $\frac{T^2}{r^3}$ a la même valeur, c'est-à-dire que T^2 est proportionnel à r^3.

Le graphe est une droite passant par l'origine : il traduit bien une relation de proportionnalité $T^2 = k\,r^3$.

Oui, le graphe est en accord avec la troisième loi de Kepler.

MÉTHODE
Pour conclure à une proportionnalité, il faut citer les deux critères : les points sont alignés et la droite passe par l'origine.

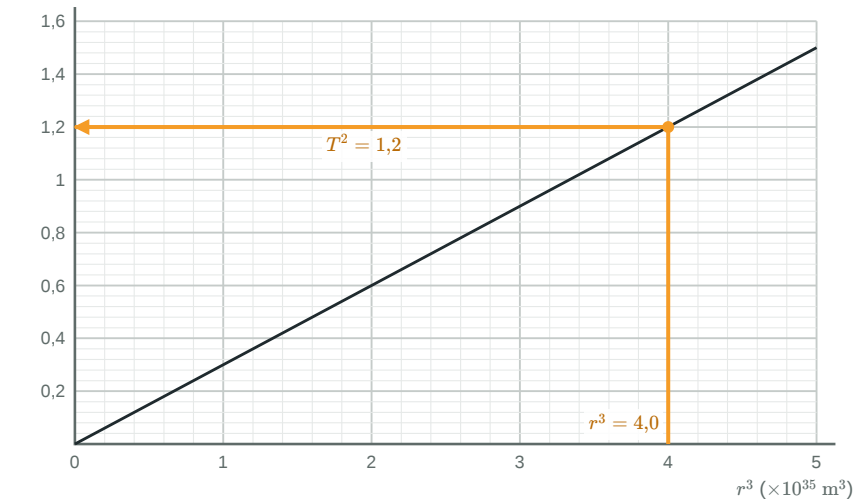
1.2.7 En utilisant le graphe de la figure 12, montrer que $\frac{T^2}{r^3} \simeq 3{,}0 \times 10^{-19}$ S.I.

Données utiles point lu sur la droite : $r^3 = 4{,}0 \times 10^{35}\ \text{m}^3$; $T^2 = 1{,}2 \times 10^{17}\ \text{s}^2$

Le rapport $\frac{T^2}{r^3}$ est le coefficient directeur de la droite, qui passe par l'origine. On choisit un point de la droite situé sur un nœud du quadrillage, le plus loin possible de l'origine.

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{1{,}2 \times 10^{17}}{4{,}0 \times 10^{35}} = 3{,}0 \times 10^{-19}\ \text{s}^2 \cdot \text{m}^{-3}$$

$\frac{T^2}{r^3} = 3{,}0 \times 10^{-19}\ \text{s}^2 \cdot \text{m}^{-3}$: c'est la valeur attendue.

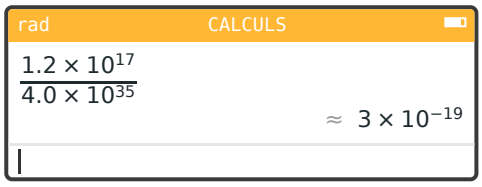


1.2.7 · Figure 12 du sujet, avec le point de lecture choisi

PIÈGE
Oublier les puissances de dix des axes : l'ordonnée se lit en 10^{17} s^2 et l'abscisse en 10^{35} m^3.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme les valeurs lues sur le graphe. L'unité S.I. du rapport se déduit des axes : des s^2 divisés par des m^3.

À LA CALCULATRICE



1.2.8 À l'aide des données de l'article et du résultat de la question 1.2.7, calculer la distance séparant les centres de Rhea Sylvia et du Soleil.

Données utiles $T = 6{,}521$ ans ; 1 an = 365 jours ; $\frac{T^2}{r^3} = 3{,}0 \times 10^{-19}\ \text{s}^2 \cdot \text{m}^{-3}$ (1.2.7)

Rhea Sylvia tourne autour du Soleil, comme les planètes : le rapport $\frac{T^2}{r^3}$ a la même valeur $k = 3{,}0 \times 10^{-19}\ \text{s}^2 \cdot \text{m}^{-3}$.

Période en secondes : $T = 6{,}521 \times 365 \times 24 \times 3600 = 2{,}056 \times 10^8$ s.

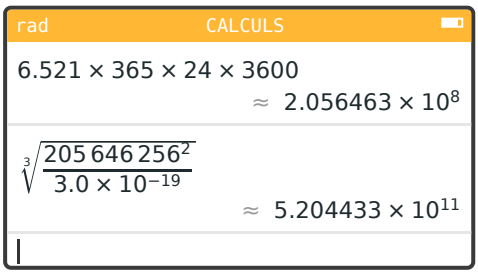
$$r = \sqrt[3]{\frac{T^2}{k}} = \sqrt[3]{\frac{(2{,}056 \times 10^8)^2}{3{,}0 \times 10^{-19}}}$$

$r = 5{,}2 \times 10^{11}$ m, soit environ 520 millions de kilomètres.

PIÈGE
Laisser la période en années : la constante de 1.2.7 est en s$^2 \cdot$ m^{-3}, donc T doit être en secondes. Ne pas oublier non plus la racine cubique.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs seulement : la constante $3{,}0 \times 10^{-19}$ limite la précision, même si la période est donnée avec quatre chiffres.

À LA CALCULATRICE



2.1 Pour le mouvement de Remus et Romulus autour de Rhea Sylvia, donner la signification et l'unité de chaque grandeur de la relation $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G\,M}$. En déduire l'unité de G dans le système international.

- T : période de révolution du satellite (Remus ou Romulus) autour de Rhea Sylvia, en seconde (s) ;
- r : rayon de l'orbite, distance entre le centre du satellite et le centre de Rhea Sylvia, en mètre (m) ;
- M : masse de l'astre attracteur, Rhea Sylvia, en kilogramme (kg) ;
- G : constante de gravitation universelle.

On isole G : $G = \frac{4\pi^2\,r^3}{M\,T^2}$. Le facteur $4\pi^2$ est sans unité, donc G s'exprime en $\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2}$.

G s'exprime en $\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{kg}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-2}$.

PIÈGE
Prendre pour M la masse du satellite. Dans la troisième loi de Kepler, M est toujours la masse de l'astre central, autour duquel on tourne.

COMPRENDRE
Avec $F = G\frac{m\,M}{r^2}$, on trouve $\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{kg}^{-2}$: c'est la même unité, puisque $1\ \mathrm{N} = 1\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$.

2.2 À l'aide des données de l'article et de la troisième loi de Kepler, déterminer la masse de l'astéroïde Rhea Sylvia.

Données utiles Romulus : $T = 87{,}6$ h ; $r = 1360$ km ; $G = 6{,}67\times10^{-11}$ S.I.

On utilise Romulus, seul satellite dont l'article donne à la fois la période et le rayon de l'orbite.

De $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G\,M}$, on tire : $M = \frac{4\pi^2\,r^3}{G\,T^2}$.

Conversions : $T = 87{,}6\times3600 = 3{,}154\times10^5$ s et $r = 1{,}360\times10^6$ m.

$$M = \frac{4\pi^2\times(1{,}360\times10^6)^3}{6{,}67\times10^{-11}\times(3{,}154\times10^5)^2}$$

$M = 1{,}50\times10^{19}\ \mathrm{kg}$

PIÈGE
Garder les heures et les kilomètres : G est en unités S.I., il faut des secondes et des mètres. L'erreur sur r est multipliée par 10^9 à cause du cube.

COMPRENDRE
Trois chiffres significatifs, comme T et G. C'est le sens du titre « balance cosmique » : observer un satellite suffit à peser l'astre autour duquel il tourne.

À LA CALCULATRICE

