Des lois de Kepler à l'étude d'un astéroïde

Bac S 2007 Métropole rattrapage (ancien programme) · Exercice 4 **4 points** **Durée conseillée 52 min**

1.1.1 En utilisant une des lois de Kepler, justifier la position du Soleil indiquée sur la figure 10.

Première loi de Kepler (loi des orbites) : dans le référentiel héliocentrique, le centre d'une planète décrit une ellipse dont le centre du Soleil occupe l'un des foyers.

Le Soleil est donc placé en un foyer de l'ellipse, ici F_1, et non au centre O.

COMPRENDRE
L'autre foyer F_2 est vide. Pour une orbite circulaire, les deux foyers sont confondus avec le centre : le cercle est une ellipse particulière.

1.1.2 Les durées de parcours de M_1 à M_1' et de M_2 à M_2' sont égales. En utilisant une des lois de Kepler, trouver la relation entre les aires hachurées A_1 et A_2.

Deuxième loi de Kepler (loi des aires) : le segment reliant le centre du Soleil au centre de la planète balaie des aires égales pendant des durées égales.

Les deux parcours ont la même durée, donc :

$$A_1 = A_2$$

1.1.3 La vitesse moyenne entre M_1 et M_1' est-elle inférieure, égale ou supérieure à celle entre M_2 et M_2' ? Justifier.

Sur une même durée Δt : $v_1 = \dfrac{M_1M_1'}{\Delta t}$ et $v_2 = \dfrac{M_2M_2'}{\Delta t}$.

Sur la figure 10, la portion de trajectoire M_1M_1' est plus courte que la portion M_2M_2'.

$v_1 < v_2$: la vitesse moyenne entre M_1 et M_1' est inférieure à celle entre M_2 et M_2'.

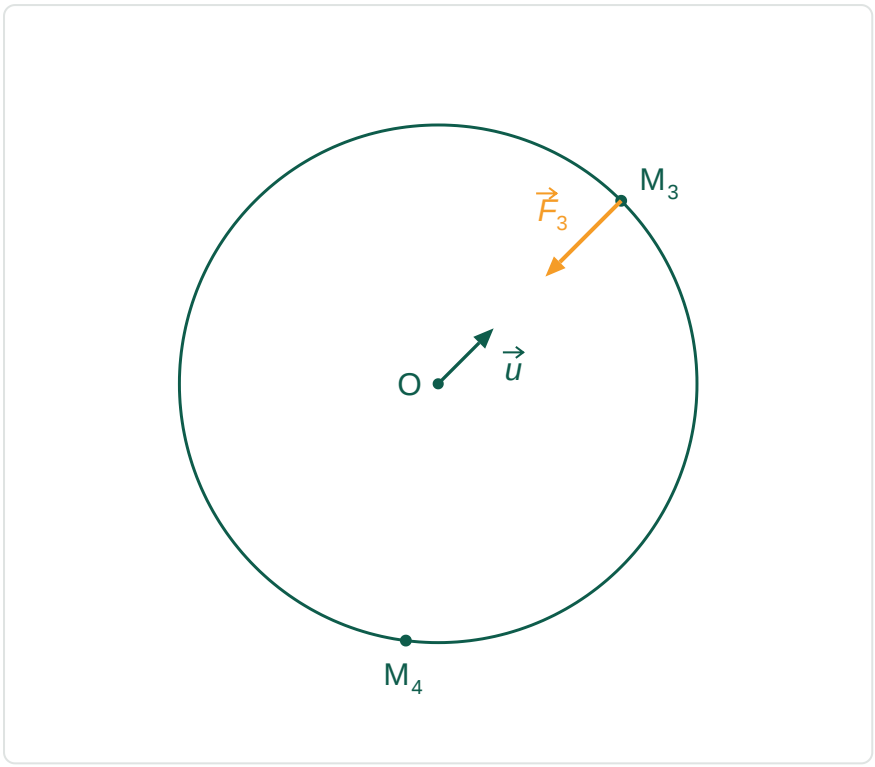
COMPRENDRE
Loin du Soleil, le secteur balayé est long et étroit : pour une même aire, l'arc parcouru est plus court. La planète est donc plus rapide près du Soleil et plus lente loin de lui.

1.2.1 Représenter sur la figure 11 de l'annexe la force de gravitation $\vec{F}_3$ exercée par le Soleil sur une planète de masse m située au point M_3.

La force $\vec{F}_3$ est attractive : son point d'application est M_3, sa direction est la droite (OM_3) et son sens va de M_3 vers O.

Flèche tracée depuis M_3, le long du rayon, pointant vers le Soleil O (voir figure).

PIÈGE
Faire partir la flèche de O : ce serait la force exercée par la planète sur le Soleil. La force subie par la planète s'applique en M_3.



1.2.1 · Figure 11 complétée : force de gravitation en M_3

1.2.2 Donner l'expression vectorielle de cette force au point M_3, en utilisant le vecteur unitaire $\vec{u}$.

Le vecteur $\vec{u}$ est dirigé de O vers M_3, la force est dirigée de M_3 vers O : elle est de sens opposé à $\vec{u}$. Sa valeur est $G\dfrac{m\,M_S}{r^2}$.

$$\vec{F}_3 = -\,G\frac{m\,M_S}{r^2}\,\vec{u}$$

PIÈGE
Oublier le signe « $-$ » : il traduit le caractère attractif de la force, de sens contraire à $\vec{u}$.

1.2.3 En citant la loi de Newton utilisée, déterminer l'expression du vecteur accélération $\vec{a}_3$ du centre d'inertie d'une planète de masse m située au point M_3.

Système {planète}, de masse m constante ; référentiel héliocentrique supposé galiléen ; seule force prise en compte : $\vec{F}_3$.

Deuxième loi de Newton : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\,\vec{a}_3$, soit $-\,G\dfrac{m\,M_S}{r^2}\,\vec{u} = m\,\vec{a}_3$.

En simplifiant par m :

$$\vec{a}_3 = -\,G\frac{M_S}{r^2}\,\vec{u}$$

COMPRENDRE
La masse m de la planète a disparu : sur une orbite de rayon donné, toutes les planètes auraient la même accélération, quelle que soit leur masse.

MÉTHODE
Toujours annoncer le système, le référentiel galiléen et le bilan des forces avant d'écrire la deuxième loi de Newton.

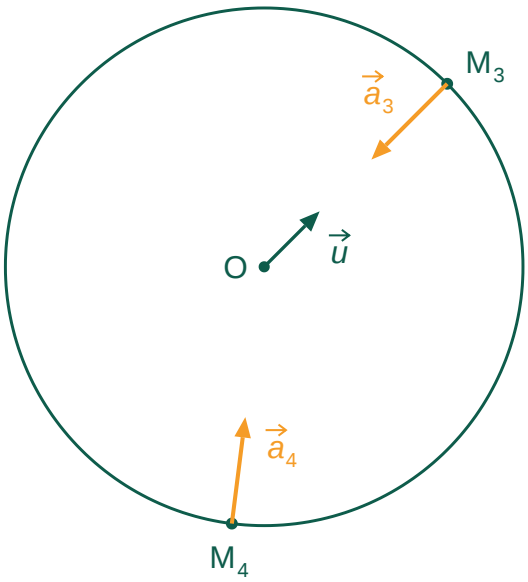
1.2.4 Représenter sur la figure 11 de l'annexe les vecteurs accélération $\vec{a}_3$ et $\vec{a}_4$ du centre d'inertie d'une planète aux points M_3 et M_4.

D'après 1.2.3, en tout point du cercle, l'accélération est portée par le rayon, dirigée vers O, de valeur $a = \dfrac{G\,M_S}{r^2}$.

Comme $OM_3 = OM_4 = r$, les deux vecteurs ont la même valeur.

$\vec{a}_3$ part de M_3 et $\vec{a}_4$ part de M_4 ; tous deux pointent vers O et ont la même longueur (voir figure).

PIÈGE
Dessiner deux flèches de longueurs différentes : même sans échelle imposée, les deux accélérations ont la même valeur et doivent avoir la même longueur.



1.2.4 · Figure 11 complétée : accélérations en M_3 et M_4, de même longueur

1.2.5 En déduire la nature du mouvement du centre d'inertie d'une planète quelconque de masse m du système solaire.

La trajectoire est un cercle de centre O. En chaque point, l'accélération est dirigée selon le rayon, vers le centre : elle n'a aucune composante tangente à la trajectoire.

Or la composante tangentielle de l'accélération vaut $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$: ici $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$, donc la valeur v de la vitesse est constante.

Le mouvement du centre d'inertie de la planète est **circulaire uniforme**.

PIÈGE
Écrire que le vecteur accélération est constant. Sa valeur est constante mais sa direction change à chaque instant ; c'est l'absence de composante tangentielle qui prouve l'uniformité.

1.2.6 Le graphe de la figure 12 représente le carré de la période de révolution de la Terre, de Mars et de Jupiter en fonction du cube du rayon de leur orbite. Est-il en accord avec la troisième loi de Kepler ?

Troisième loi de Kepler : pour toutes les planètes du système solaire, le rapport $\frac{T^2}{r^3}$ a la même valeur, c'est-à-dire que T^2 est proportionnel à r^3.

Le graphe est une droite passant par l'origine : il traduit bien une relation de proportionnalité $T^2 = k\,r^3$.

Oui, le graphe est en accord avec la troisième loi de Kepler.

MÉTHODE
Pour conclure à une proportionnalité, il faut citer les deux critères : les points sont alignés et la droite passe par l'origine.

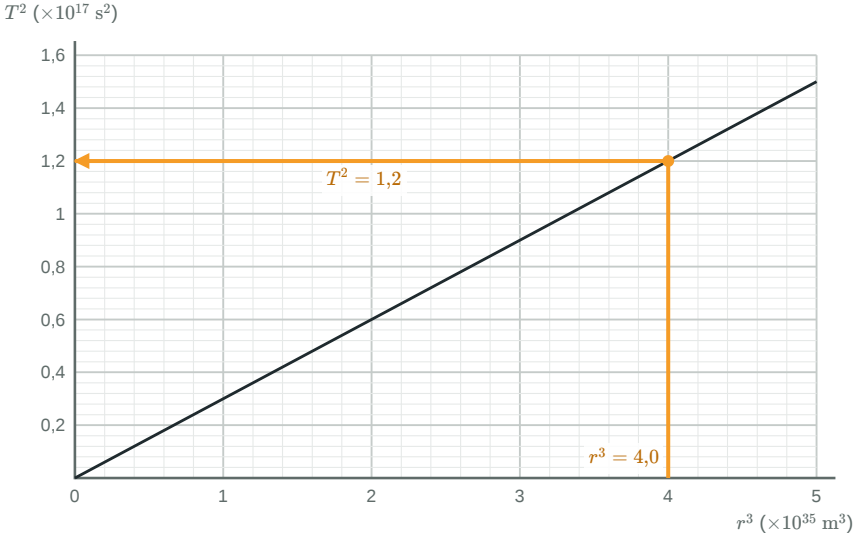
1.2.7 En utilisant le graphe de la figure 12, montrer que $\frac{T^2}{r^3} \simeq 3{,}0 \times 10^{-19}$ S.I.

Données utiles point lu sur la droite : $r^3 = 4{,}0 \times 10^{35}\ \text{m}^3$; $T^2 = 1{,}2 \times 10^{17}\ \text{s}^2$

Le rapport $\frac{T^2}{r^3}$ est le coefficient directeur de la droite, qui passe par l'origine. On choisit un point de la droite situé sur un nœud du quadrillage, le plus loin possible de l'origine.

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{1{,}2 \times 10^{17}}{4{,}0 \times 10^{35}} = 3{,}0 \times 10^{-19}\ \text{s}^2 \cdot \text{m}^{-3}$$

$\frac{T^2}{r^3} = 3{,}0 \times 10^{-19}\ \text{s}^2 \cdot \text{m}^{-3}$: c'est la valeur attendue.



1.2.7 · Figure 12 du sujet, avec le point de lecture choisi

PIÈGE
Oublier les puissances de dix des axes : l'ordonnée se lit en 10^{17} s^2 et l'abscisse en 10^{35} m^3.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme les valeurs lues sur le graphe. L'unité S.I. du rapport se déduit des axes : des s^2 divisés par des m^3.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS
$\frac{1.2 \times 10^{17}}{4.0 \times 10^{35}} \approx 3 \times 10^{-19}$

1.2.8 À l'aide des données de l'article et du résultat de la question 1.2.7, calculer la distance séparant les centres de Rhea Sylvia et du Soleil.

Données utiles $T = 6{,}521$ ans ; 1 an = 365 jours ; $\frac{T^2}{r^3} = 3{,}0 \times 10^{-19}\ \text{s}^2 \cdot \text{m}^{-3}$ (1.2.7)

Rhea Sylvia tourne autour du Soleil, comme les planètes : le rapport $\frac{T^2}{r^3}$ a la même valeur $k = 3{,}0 \times 10^{-19}\ \text{s}^2 \cdot \text{m}^{-3}$.

Période en secondes : $T = 6{,}521 \times 365 \times 24 \times 3600 = 2{,}056 \times 10^8$ s.

$$r = \sqrt[3]{\frac{T^2}{k}} = \sqrt[3]{\frac{(2{,}056 \times 10^8)^2}{3{,}0 \times 10^{-19}}}$$

$r = 5{,}2 \times 10^{11}$ m, soit environ 520 millions de kilomètres.

PIÈGE
Laisser la période en années : la constante de 1.2.7 est en s$^2 \cdot$ m^{-3}, donc T doit être en secondes. Ne pas oublier non plus la racine cubique.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs seulement : la constante $3{,}0 \times 10^{-19}$ limite la précision, même si la période est donnée avec quatre chiffres.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS
$6.521 \times 365 \times 24 \times 3600 \approx 2.056463 \times 10^8$
$\sqrt[3]{\frac{205\,646\,256^2}{3.0 \times 10^{-19}}} \approx 5.204433 \times 10^{11}$

2.1 Pour le mouvement de Remus et Romulus autour de Rhea Sylvia, donner la signification et l'unité de chaque grandeur de la relation $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G\,M}$. En déduire l'unité de G dans le système international.

- T : période de révolution du satellite (Remus ou Romulus) autour de Rhea Sylvia, en seconde (s) ;
- r : rayon de l'orbite, distance entre le centre du satellite et le centre de Rhea Sylvia, en mètre (m) ;
- M : masse de l'astre attracteur, Rhea Sylvia, en kilogramme (kg) ;
- G : constante de gravitation universelle.

On isole G : $G = \frac{4\pi^2\,r^3}{M\,T^2}$. Le facteur $4\pi^2$ est sans unité, donc G s'exprime en $\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2}$.

G s'exprime en $\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{kg}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-2}$.

PIÈGE
Prendre pour M la masse du satellite. Dans la troisième loi de Kepler, M est toujours la masse de l'astre central, autour duquel on tourne.

COMPRENDRE
Avec $F = G\frac{m\,M}{r^2}$, on trouve $\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{kg}^{-2}$: c'est la même unité, puisque $1\ \mathrm{N} = 1\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$.

2.2 À l'aide des données de l'article et de la troisième loi de Kepler, déterminer la masse de l'astéroïde Rhea Sylvia.

Données utiles Romulus : $T = 87{,}6$ h ; $r = 1360$ km ; $G = 6{,}67\times10^{-11}$ S.I.

On utilise Romulus, seul satellite dont l'article donne à la fois la période et le rayon de l'orbite.

De $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G\,M}$, on tire : $M = \frac{4\pi^2\,r^3}{G\,T^2}$.

Conversions : $T = 87{,}6\times3600 = 3{,}154\times10^5$ s et $r = 1{,}360\times10^6$ m.

$$M = \frac{4\pi^2\times(1{,}360\times10^6)^3}{6{,}67\times10^{-11}\times(3{,}154\times10^5)^2}$$

$M = 1{,}50\times10^{19}\ \mathrm{kg}$

PIÈGE
Garder les heures et les kilomètres : G est en unités S.I., il faut des secondes et des mètres. L'erreur sur r est multipliée par 10^9 à cause du cube.

COMPRENDRE
Trois chiffres significatifs, comme T et G. C'est le sens du titre « balance cosmique » : observer un satellite suffit à peser l'astre autour duquel il tourne.

À LA CALCULATRICE

