2007/09 Métropole
EXERCICE III : DES LOIS DE KEPLER À L'ÉTUDE D'UN ASTÉROÏDE… (4 points)

L'objectif de cet exercice est d'étudier le mouvement de quelques planètes du système solaire et de déterminer la masse de l'astéroïde Rhea Sylvia, récemment découvert par une équipe d'astronomes. Celui-ci a la forme d'une grosse pomme de terre mesurant quelques centaines de kilomètres.
Par souci de simplification, dans tout l'exercice, les astres étudiés sont considérés à répartition sphérique de masse.
Donnée : constante de gravitation universelle $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ *S.I*
Les représentations vectorielles demandées sont à effectuer sans souci d'échelle.

1. En hommage à Kepler

« Johannes Kepler, né le 27 décembre 1571 à Weil der Stadt, près de Stuttgart (Allemagne), mort le 15 novembre 1630 à Ratisbonne, est un astronome célèbre. Il a étudié et confirmé l'hypothèse héliocentrique (la Terre tourne autour du Soleil) de Nicolas Copernic. Il a également découvert que les trajectoires des planètes n'étaient pas des cercles parfaits centrés sur le Soleil mais des ellipses. En outre, il a énoncé les lois (dites lois de Kepler) qui régissent les mouvements des planètes sur leurs orbites. »



1.1. Planètes en orbite elliptique.
La figure 10 ci-dessous représente la trajectoire elliptique du centre d'inertie M d'une planète du système solaire de masse m dans le référentiel héliocentrique considéré galiléen. Les deux foyers F_1 *et* F_2 *de l'ellipse et son centre O sont indiqués.*

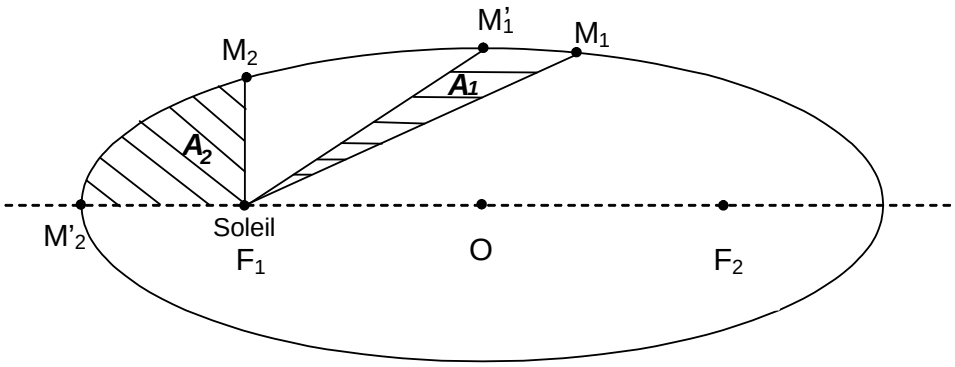


Figure 10

1.1.1. En utilisant une des lois de Kepler, justifier la position du Soleil indiquée sur la figure 10.
1.1.2. On suppose que les durées de parcours entre les points M_1 et M'_1 puis M_2 et M'_2 sont égales. En utilisant une des lois de Kepler, trouver la relation entre les aires hachurées A_1 et A_2 sur la figure 10.
1.1.3. La valeur de la vitesse moyenne entre les points M_1 et M'_1 est-elle inférieure, égale ou supérieure à celle entre les points M_2 et M'_2 ? Justifier.

1.2. Planètes en orbite circulaire.
Dans cette partie, pour simplifier, on modélise les trajectoires des planètes du système solaire dans le référentiel héliocentrique par des cercles de rayon r dont le centre O est le Soleil de masse M_S.

1.2.1. Représenter sur la ***FIGURE 11 DE L'ANNEXE PAGE 13*** la force de gravitation $\overrightarrow{F_3}$ exercée par le Soleil sur une planète quelconque du système solaire de masse *m* dont le centre d'inertie est situé au point M_3.

1.2.2. Donner l'expression vectorielle de cette force au point M_3, en utilisant le vecteur unitaire $\vec{u}$.

Pour la suite on considère que les valeurs des autres forces de gravitation s'exerçant sur la planète sont négligeables par rapport à la valeur de $\overrightarrow{F_3}$.

1.2.3. En citant la loi de Newton utilisée, déterminer l'expression du vecteur accélération $\overrightarrow{a_3}$ du centre d'inertie d'une planète quelconque de masse *m* du système solaire dont le centre d'inertie est situé au point M_3.

1.2.4. Représenter sur la ***FIGURE 11 DE L'ANNEXE PAGE 13*** les vecteurs accélérations $\overrightarrow{a_3}$ et $\overrightarrow{a_4}$ du centre d'inertie d'une planète quelconque du système solaire respectivement aux points M_3 et M_4.

1.2.5. En déduire la nature du mouvement du centre d'inertie d'une planète quelconque de masse *m* du système solaire.

1.2.6. Le graphe de la ***FIGURE 12 DE L'ANNEXE PAGE 13*** représente l'évolution du carré de la période de révolution des planètes Terre, Mars et Jupiter en fonction du cube du rayon de leur orbite. Ce graphe est-il en accord avec la troisième loi de Kepler ?

1.2.7. En utilisant le graphe de la ***FIGURE 12 DE L'ANNEXE PAGE 13***, montrer que

$$\frac{T^2}{r^3} \simeq 3{,}0 \times 10^{-19} \text{ S.I.}$$

1.2.8.

> « *Une équipe composée de Franck Marchis (université de Californie à Berkeley) et de trois astronomes de l'Observatoire de Paris, Pascal Descamps, Daniel Hestroffer et Jérome Berthier, vient de découvrir un astéroïde, nommé Rhea Sylvia, qui gravite à une distance constante du Soleil avec une période de révolution de 6,521 ans.* »
>
> *D'après un article paru dans LE MONDE le 13.07.2005*

À l'aide des données de l'article précédent et du résultat de la question 1.2.7., calculer la distance séparant les centres respectifs de Rhea Sylvia et du Soleil.

Donnée : 1 an = 365 jours

2. La troisième loi de Kepler comme balance cosmique…

> *« Grâce au Very Large Telescope de l'European Southern Observatory (ESO) au Chili, les astronomes ont également découvert que Rhea Sylvia était accompagné de deux satellites baptisés Remus et Romulus. Leurs calculs ont montré que les deux satellites décrivent une orbite circulaire autour de Rhea Sylvia ; Romulus effectue son orbite en 87,6 heures. Les distances entre chaque satellite et Rhea Sylvia sont respectivement de 710 kilomètres pour Remus et 1360 kilomètres pour Romulus.»*
>
> *D'après un article paru dans LE MONDE le 13.07.2005*

On s'intéresse désormais au mouvement circulaire uniforme du centre d'inertie d'un satellite de Rhéa Sylvia. L'étude est faite dans un référentiel "Rhéa Sylvia-centrique" muni d'un repère dont l'origine est le centre de Rhéa Sylvia et dont les trois axes sont dirigés vers des étoiles fixes.

2.1. On rappelle que la troisième loi de Kepler a pour expression littérale : $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M}$. Dans le cadre de l'étude du mouvement de Remus et Romulus autour de Rhea Sylvia, donner la signification de chaque grandeur et son unité. En déduire l'unité de G dans le système international.

2.2. À l'aide des données de l'article précédent et de la troisième loi de Kepler, déterminer la masse de l'astéroïde Rhea Sylvia.

ANNEXE À RENDRE AGRAFÉE AVEC LA COPIE

ANNEXE DE L'EXERCICE III

Questions 1.2.1 et 1.2.4.

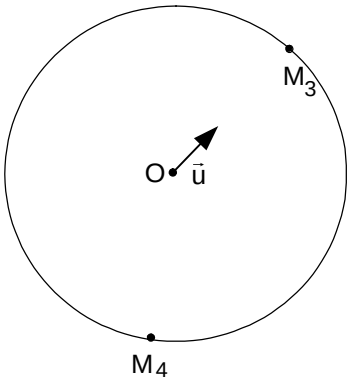


Figure 11

Questions 1.2.6. et 1.2.7.

$T^2 = f(r^3)$

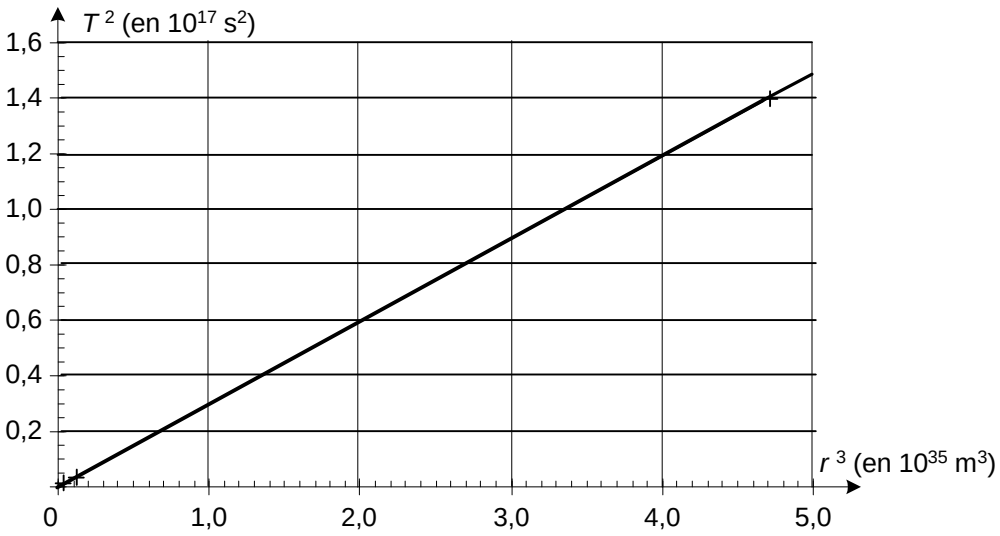


Figure 12