Système d'allumage classique dans un moteur à essence

Bac S 2007 Métropole rattrapage (ancien programme) · Exercice 2 **5,5 points** **Durée conseillée 1 h 05**

1.1.1 Rupteur fermé (figure 4) : montrer que l'intensité i_1 vérifie $\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \dfrac{r}{L}\,i_1 = \dfrac{E}{L}$.

Loi d'additivité des tensions dans la maille : $E = u_r + u_L$.

Loi d'Ohm : $u_r = r\,i_1$. Bobine d'inductance pure : $u_L = L\,\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$.

Donc $E = r\,i_1 + L\,\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$, puis on divise par L :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{r}{L}\,i_1 = \frac{E}{L}}$$

PIÈGE
Les flèches u_r et u_L sont opposées au sens de i_1 (convention récepteur) : les deux relations s'écrivent sans signe moins.

COMPRENDRE
La bobine et le circuit RL ne figurent plus au programme actuel de spécialité. La démarche reste celle du circuit RC : loi des mailles, relation propre à chaque dipôle, puis équation différentielle du premier ordre.

1.1.2 Que devient cette équation différentielle en régime permanent ?

En régime permanent, l'intensité ne varie plus : $i_1 = I_1$ constante, donc $\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = 0$.

L'équation devient $\dfrac{r}{L}\,I_1 = \dfrac{E}{L}$, soit $r\,I_1 = E$.

COMPRENDRE
En régime permanent, $u_L = 0$: la bobine idéale se comporte comme un simple fil, seule la résistance r limite le courant.

1.1.3 En déduire la valeur de l'intensité I_1 du courant dans le circuit primaire en régime permanent.

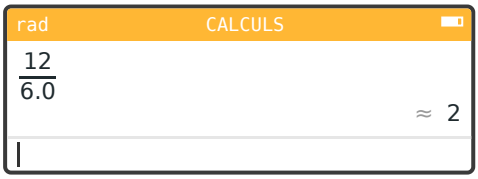
Données utiles $E = 12$ V ; $r = 6{,}0\ \Omega$

$$I_1 = \frac{E}{r} = \frac{12}{6{,}0}$$

$$\boxed{I_1 = 2{,}0\text{ A}}$$

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme E et r : on écrit $2{,}0$ A et non 2 A.

À LA CALCULATRICE



1.1.4 Peut-il y avoir une étincelle aux bornes de la bougie en régime permanent ? Justifier.

En régime permanent, $\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = 0$, donc $u_2 = \alpha\,\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = 0$ V.

Or l'étincelle exige $|u_2| > 10\,000$ V.

Non : en régime permanent $u_2 = 0$ V, aucune étincelle ne peut jaillir aux bornes de la bougie.

COMPRENDRE
Ce n'est pas la valeur du courant qui crée la tension u_2, mais sa variation. Un courant de $2{,}0$ A constant ne produit rien au secondaire.

1.2.1 Rupteur ouvert (figure 5) : quel est l'effet de la bobine sur la rupture du courant ?

Une bobine s'oppose aux variations de l'intensité du courant qui la traverse.

La bobine retarde la rupture du courant : i_1 ne s'annule pas instantanément, il décroît de façon continue à partir de I_1.

COMPRENDRE
L'intensité dans une bobine ne peut pas subir de discontinuité. Le courant continue donc de circuler juste après l'ouverture, à travers l'air devenu conducteur : c'est l'étincelle au rupteur.

1.2.2 Parmi les figures 6.a, 6.b et 6.c, choisir en justifiant la seule compatible avec l'expression donnée de $i_1(t)$.

Données utiles $i_1(t) = \dfrac{E}{R+r} + \left(I_1 - \dfrac{E}{R+r}\right) \mathrm{e}^{-t/\tau}$; $I_1 = 2{,}0$ A (1.1.3) ; R de plusieurs mégaohms

À $t = 0$: $\mathrm{e}^0 = 1$, donc $i_1(0) = I_1$, valeur non nulle. La figure 6.b, qui part de zéro, est exclue.

Quand t devient grand : $\mathrm{e}^{-t/\tau} \to 0$, donc $i_1 \to \dfrac{E}{R+r}$, valeur très faible mais non nulle, bien inférieure à $I_1 = \dfrac{E}{r}$ car $R + r \gg r$.

L'intensité décroît donc de I_1 vers cette limite selon une exponentielle. La figure 6.c est une droite (fonction affine) qui atteint zéro : elle est exclue.

Seule la figure 6.a convient : décroissance exponentielle de I_1 vers la valeur faible $\dfrac{E}{R+r}$.

MÉTHODE
Pour identifier la courbe d'une fonction exponentielle, tester trois choses : la valeur à $t = 0$, la limite quand t tend vers l'infini, et la forme (courbe à asymptote, pas un segment de droite).

1.2.3 À partir de la courbe $|u_2(t)|$ de la figure 7 de l'annexe, déterminer la valeur de la constante de temps τ.

Données utiles $u_2 = \alpha \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$; expression de $i_1(t)$ (1.2.2)

On dérive $i_1(t)$: $\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{\tau}\left(I_1 - \dfrac{E}{R+r}\right) \mathrm{e}^{-t/\tau}$, donc

$$|u_2(t)| = |u_2(0)|\ \mathrm{e}^{-t/\tau}$$

À la date $t = \tau$: $|u_2(\tau)| = |u_2(0)| \times \mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}37 \times |u_2(0)|$.

Lecture de la figure 7 : $|u_2(0)| = 15\,000$ V, donc $|u_2(\tau)| = 15\,000 \times \mathrm{e}^{-1} \approx 5{,}5 \times 10^3$ V.

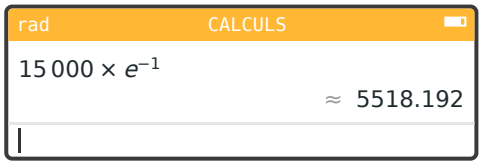
L'abscisse du point de la courbe d'ordonnée $5\,500$ V est $2{,}0$ ms.

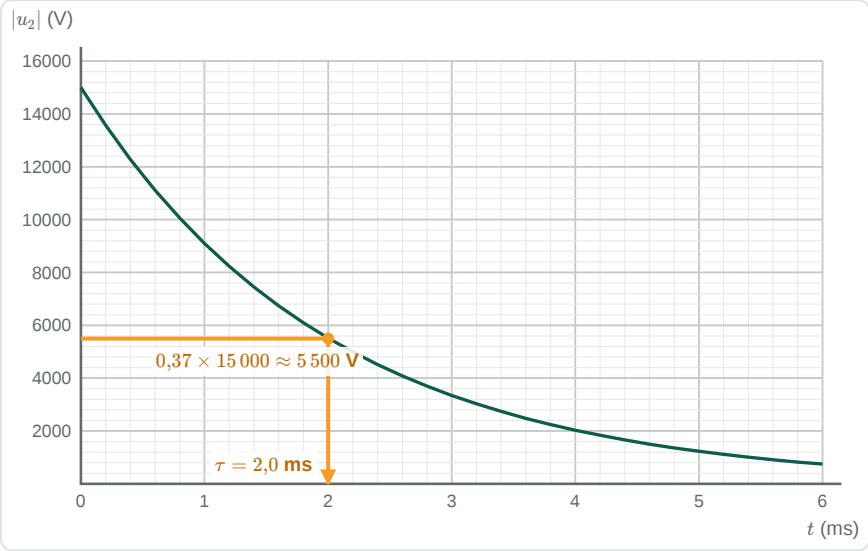
$\tau = 2{,}0$ ms

COMPRENDRE
i_1 décroît, donc u_2 est négative : c'est pourquoi le sujet trace sa valeur absolue.

MÉTHODE
Pour une exponentielle décroissante vers zéro, τ est la date où la grandeur vaut 37 % de sa valeur initiale. Autre possibilité : la tangente à l'origine coupe l'axe des abscisses à $t = \tau$.

À LA CALCULATRICE





1.2.3 · Figure 7 de l'annexe complétée : lecture de la constante de temps

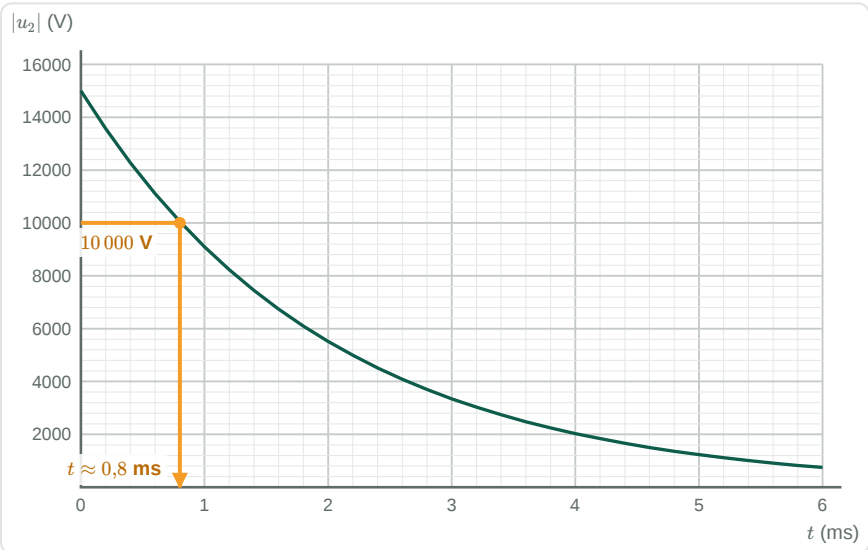
1.2.4 À partir de quelle date peut-on considérer qu'il n'y a plus d'étincelle aux bornes de la bougie ?

Données utiles étincelle si $|u_2| > 10\,000$ V

L'étincelle existe tant que $|u_2| > 10\,000$ V. Sur la figure 7, la courbe passe par l'ordonnée 10 000 V à l'abscisse $t \approx 0{,}8$ ms, puis reste en dessous.

Il n'y a plus d'étincelle à partir de $t \approx 0{,}8$ ms.

COMPRENDRE
Sans condensateur, la bougie ne donne donc qu'une seule étincelle, très brève, et le rupteur subit lui aussi une étincelle qui l'use.



1.2.4 · Figure 7 : date à laquelle la tension repasse sous 10 000 V

2.1.1 Bobine idéale ($r = 0$) : donner l'expression littérale de l'intensité $i_1 = \dfrac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}$.

Données utiles $q(t) = Q_0 \cos\left(\dfrac{2\pi}{\gamma}\, t\right) + C\,E$

On dérive $q(t)$ par rapport au temps ; le terme $C\,E$ est constant, sa dérivée est nulle.

$$i_1(t) = -\frac{2\pi}{\gamma}\, Q_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\gamma}\, t\right)$$

PIÈGE
Oublier le facteur $\dfrac{2\pi}{\gamma}$: la dérivée de $\cos(\omega t)$ est $-\omega \sin(\omega t)$, pas $-\sin(\omega t)$.

2.1.2 Donner l'expression littérale de $\frac{\mathrm{d}^2q(t)}{\mathrm{d}t^2}$.

On dérive $i_1(t)$ une nouvelle fois :

$$\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} = -\left(\frac{2\pi}{\gamma}\right)^2 Q_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\gamma}t\right)$$

2.1.3 En remplaçant dans l'équation (2), montrer que $q(t)$ est solution si et seulement si $\gamma = 2\pi\sqrt{LC}$.

Données utiles équation (2) : $\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{q}{LC} = \frac{E}{L}$

On remplace dans le membre de gauche de (2) :

$$-\frac{4\pi^2}{\gamma^2} Q_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\gamma}t\right) + \frac{Q_0}{LC}\cos\left(\frac{2\pi}{\gamma}t\right) + \frac{CE}{LC} = \frac{E}{L}$$

Comme $\frac{CE}{LC} = \frac{E}{L}$, il reste :

$$Q_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\gamma}t\right)\left(\frac{1}{LC} - \frac{4\pi^2}{\gamma^2}\right) = 0$$

Cette égalité doit être vraie à toute date t, avec $Q_0 > 0$: il faut et il suffit que $\frac{1}{LC} = \frac{4\pi^2}{\gamma^2}$, soit $\gamma^2 = 4\pi^2 LC$.

$\gamma = 2\pi\sqrt{LC}$ (γ positif)

PIÈGE
Diviser par $\cos\left(\frac{2\pi}{\gamma}t\right)$ sans précaution : le cosinus s'annule à certaines dates. L'argument correct est « égalité vraie pour tout t », ce qui impose que la parenthèse soit nulle.

2.1.4 Que représente γ pour ce circuit ?

La fonction $\cos\left(\frac{2\pi}{\gamma}t\right)$ reprend la même valeur chaque fois que t augmente de γ.

γ est la période propre $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$ des oscillations électriques du circuit LC ; elle s'exprime en secondes.

COMPRENDRE
Les oscillations électriques des circuits LC et RLC ne sont plus au programme actuel de spécialité. À l'époque, l'expression de la période propre était à connaître.

2.1.5 En utilisant la réponse à la question 2.1.2, montrer que $u_2(t) = -A\cos\left(\frac{2\pi}{\gamma}t\right)$ où A est une constante positive.

Données utiles $u_2 = \alpha\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$; $\gamma = 2\pi\sqrt{LC}$ (2.1.3)

Comme $i_1 = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$: $u_2 = \alpha\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = \alpha\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} = -\alpha\left(\frac{2\pi}{\gamma}\right)^2 Q_0\cos\left(\frac{2\pi}{\gamma}t\right)$

Avec $\left(\frac{2\pi}{\gamma}\right)^2 = \frac{1}{LC}$, on pose $A = \frac{\alpha Q_0}{LC}$. Les grandeurs α, Q_0, L et C sont positives et constantes, donc A aussi.

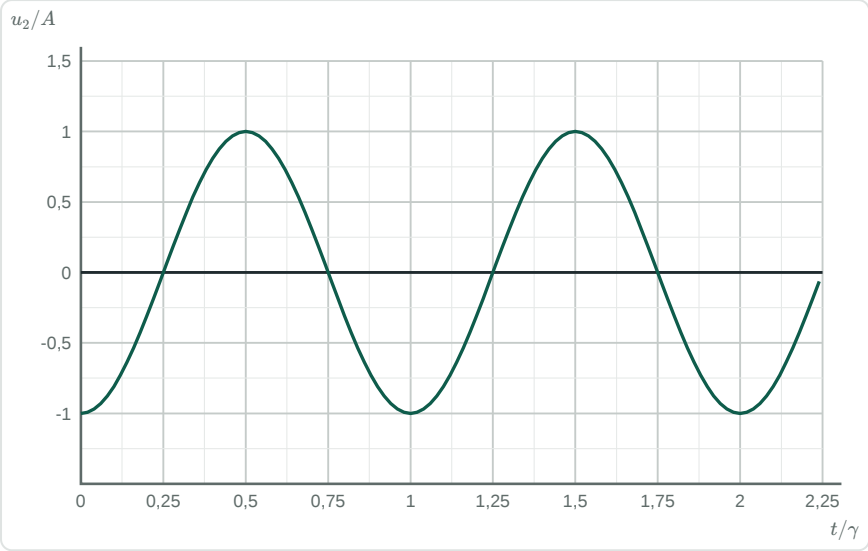
$u_2(t) = -A\cos\left(\frac{2\pi}{\gamma}t\right)$ avec $A = \frac{\alpha Q_0}{LC} > 0$

2.1.6 Tracer l'allure de la variation de la tension $u_2(t)$ en fonction du temps et qualifier le régime observé.

À $t = 0$: $u_2(0) = -A$. La tension oscille ensuite entre $-A$ et $+A$, avec une amplitude constante et une période γ (voir le tracé).

Régime périodique : oscillations sinusoïdales non amorties.

PIÈGE
Faire partir la courbe de $+A$ ou de zéro. Le signe moins impose un départ à $-A$, avec une tangente horizontale ; la tension s'annule à $t = \gamma/4$.



2.1.6 · Allure de $u_2(t)$: sinusoïde de période γ partant de $-A$

2.2.1 Cas $r \neq 0$ (figure 9) : qualifier le régime observé et expliquer pourquoi l'amplitude de $u_2(t)$ décroît au cours du temps.

La tension oscille autour de zéro avec une amplitude qui diminue : le régime est pseudo-périodique (oscillations amorties).

La résistance r de la bobine n'est pas nulle. À chaque échange d'énergie entre le condensateur et la bobine, une partie de l'énergie du circuit est dissipée par effet Joule dans r, sous forme de transfert thermique.

> Régime pseudo-périodique ; l'amplitude décroît car l'énergie du circuit est peu à peu dissipée par effet Joule dans la résistance r.

PIÈGE
Écrire « régime périodique » : la courbe ne se reproduit pas identique à elle-même. Le mot attendu est « pseudo-périodique », et la cause doit être nommée : l'effet Joule.

2.2.2 Expliquer, grâce à la figure 9, pourquoi en présence du condensateur il y a un « train d'étincelles » aux bornes de la bougie plutôt qu'une étincelle unique.

Données utiles étincelle si $|u_2| > 10\,000$ V

Une étincelle jaillit chaque fois que $|u_2|$ dépasse $10\,000$ V. Sur la figure 9, la tension oscille et franchit ce seuil plusieurs fois : au voisinage de $t = 0$ ($u_2 \approx -15\,000$ V), puis vers 2 ms ($\approx +14\,000$ V), vers 4 ms et vers 6 ms (extremums légèrement au-delà de $10\,000$ V en valeur absolue).

Ensuite l'amplitude reste inférieure à $10\,000$ V : plus d'étincelle.

> La tension oscillante dépasse quatre fois le seuil de $10\,000$ V en valeur absolue : il y a quatre étincelles successives, un « train d'étincelles », au lieu d'une seule.

COMPRENDRE
Le signe de u_2 n'a pas d'importance : les extremums négatifs comptent autant que les positifs. Le condensateur protège le rupteur et améliore l'allumage.