Jeu de boulet

Bac S 2007 Antilles-Guyane (ancien programme) · Exercice 4 **4 points** **Durée conseillée 52 min**

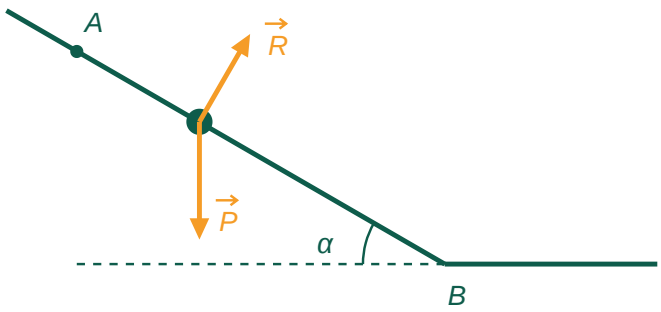
1.1 Faire l'inventaire des forces extérieures agissant sur le boulet lâché en A et les représenter sur un schéma, sans souci d'échelle.

Système {boulet}, référentiel terrestre supposé galiléen. Sans frottement, deux forces s'exercent sur le boulet :

- son poids $\vec{P}$: vertical, vers le bas, de valeur $P = m\,g$;
- la réaction $\vec{R}$ du plan incliné : perpendiculaire au plan, dirigée vers le haut.

Deux forces : le poids $\vec{P}$ (vertical, vers le bas) et la réaction $\vec{R}$ (perpendiculaire au plan incliné).

PIÈGE
Dessiner $\vec{R}$ verticale. Sans frottement, la réaction du support est perpendiculaire au plan incliné, donc penchée de α par rapport à la verticale.



1.1 · Forces exercées sur le boulet entre A et B

1.2.1 Donner l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur au point A et vérifier qu'elle vaut $2{,}5 \times 10^{-2}$ J.

Données utiles $m = 10\ \text{g} = 1{,}0 \times 10^{-2}\ \text{kg}$; $g = 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; $D = 0{,}50\ \text{m}$; $\alpha = 30^\circ$

L'origine des altitudes est au niveau de C, donc de B : $z_A = h_A$ et $E_{PP}(A) = m\,g\,h_A$.

Dans le triangle rectangle d'hypoténuse $AB = D$: $h_A = D\sin\alpha$, d'où

$$E_{PP}(A) = m\,g\,D\sin\alpha = 1{,}0 \times 10^{-2} \times 9{,}8 \times 0{,}50 \times \sin 30^\circ$$

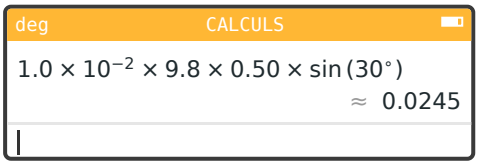
$$E_{PP}(A) = 2{,}5 \times 10^{-2}\ \text{J}$$

$E_{PP}(A) = m\,g\,D\sin\alpha = 2{,}5 \times 10^{-2}$ J : c'est la valeur attendue.

PIÈGE
Laisser la masse en grammes : le résultat serait mille fois trop grand. Une énergie en joules exige une masse en kilogrammes.

COMPRENDRE
Les données ont deux chiffres significatifs : $0{,}0245$ J s'écrit $2{,}5 \times 10^{-2}$ J. Tous les résultats de l'exercice sont donnés avec deux chiffres.

À LA CALCULATRICE



1.2.2 En déduire l'expression puis la valeur de l'énergie mécanique du système au point A.

Données utiles $E_{PP}(A) = 2{,}5 \times 10^{-2}$ J (1.2.1)

$E_m(A) = E_C(A) + E_{PP}(A) = \dfrac{1}{2} m v_A^2 + m g D \sin\alpha$

Le boulet est lâché sans vitesse initiale : $v_A = 0$, donc $E_C(A) = 0$.

$\boxed{E_m(A) = m g D \sin\alpha = 2{,}5 \times 10^{-2} \text{ J}}$

1.2.3 En déduire la valeur de l'énergie mécanique du système au point B, en justifiant.

Données utiles $E_m(A) = 2{,}5 \times 10^{-2}$ J (1.2.2)

Les frottements sont négligés et la réaction $\vec{R}$, perpendiculaire au déplacement, ne travaille pas. Seul le poids, force conservative, travaille : l'énergie mécanique du boulet se conserve entre A et B.

$\boxed{E_m(B) = E_m(A) = 2{,}5 \times 10^{-2} \text{ J}}$

COMPRENDRE
Entre A et B, l'énergie potentielle se transforme intégralement en énergie cinétique : en B, à l'altitude de référence, toute l'énergie mécanique est cinétique.

1.3 Montrer que la vitesse au point B a pour expression $v_B = \sqrt{2 g D \sin\alpha}$.

En B, $z_B = 0$ donc $E_{PP}(B) = 0$ et $E_m(B) = \dfrac{1}{2} m v_B^2$.

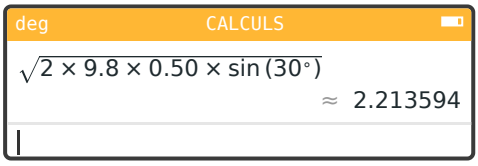
Conservation de l'énergie mécanique : $E_m(B) = E_m(A)$, soit

$$\frac{1}{2} m v_B^2 = m g D \sin\alpha \quad \Longrightarrow \quad v_B^2 = 2 g D \sin\alpha$$

$\boxed{v_B = \sqrt{2 g D \sin\alpha}}$ (soit $2{,}2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, valeur donnée par le sujet)

COMPRENDRE
La masse se simplifie : la vitesse en bas de la pente ne dépend pas de la masse du boulet, seulement du dénivelé $D \sin\alpha$.

À LA CALCULATRICE



2.1.1 Énoncer la deuxième loi de Newton.

Dans un référentiel galiléen, la somme vectorielle des forces extérieures appliquées à un système de masse m constante est égale au produit de sa masse par le vecteur accélération de son centre d'inertie.

$\boxed{\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \vec{a}}$

PIÈGE
Oublier « dans un référentiel galiléen » ou écrire la relation sans vecteurs : l'énoncé est alors incomplet.

2.1.2 Appliquer cette loi au boulet une fois qu'il a quitté le point C.

Après C, le boulet n'est plus en contact avec le support et l'action de l'air est négligée : il n'est soumis qu'à son poids $\vec{P} = m \vec{g}$ (chute libre).

Deuxième loi de Newton : $m \vec{g} = m \vec{a}$.

$\boxed{\vec{a} = \vec{g}}$

2.1.3 Déterminer l'expression des composantes du vecteur accélération dans le repère Cxz.

L'axe Cx est horizontal et l'axe Cz vertical vers le haut ; $\vec{g}$ est vertical vers le bas. En projetant $\vec{a} = \vec{g}$:

$a_x = 0$ et $a_z = -g$

PIÈGE
Écrire $a_z = +g$: l'axe Cz est orienté vers le haut alors que $\vec{g}$ pointe vers le bas.

2.2.1 Déterminer l'expression des composantes du vecteur vitesse dans le repère Cxz.

Données utiles en C ($t = 0$) : vitesse horizontale de valeur $v_C = v_B$

$\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$: on cherche les primitives de $a_x = 0$ et $a_z = -g$:

$$v_x(t) = k_1 \qquad v_z(t) = -g\,t + k_2$$

À $t = 0$, la vitesse est horizontale : $v_x(0) = v_C$ et $v_z(0) = 0$, donc $k_1 = v_C$ et $k_2 = 0$.

$v_x(t) = v_C = \sqrt{2\,g\,D\sin\alpha}$ et $v_z(t) = -g\,t$

MÉTHODE
Accélération → vitesse → position : à chaque étape, écrire la primitive avec sa constante, puis fixer la constante avec la condition initiale à $t = 0$.

2.2.2 À partir des composantes du vecteur position, établir l'équation de la trajectoire z en fonction de x.

Données utiles $x(t) = \sqrt{2\,g\,D\sin\alpha}\;t$; $z(t) = -\dfrac{1}{2}\,g\,t^2$

On élimine le temps : $t = \dfrac{x}{\sqrt{2\,g\,D\sin\alpha}}$, que l'on reporte dans z :

$$z = -\frac{1}{2}\,g \times \frac{x^2}{2\,g\,D\sin\alpha}$$

$z(x) = -\dfrac{x^2}{4\,D\sin\alpha}$

COMPRENDRE
La trajectoire est un arc de parabole de sommet C. L'intensité g se simplifie : la forme de la trajectoire ne dépend que de D et de α.

2.3.1 Calculer le temps nécessaire pour que le boulet atteigne le sol.

Données utiles $h_C = 0{,}40\ \mathrm{m}$; $g = 9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$

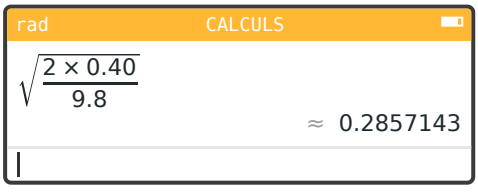
Le sol est à la cote $z = -h_C$. À l'instant t_f où le boulet le touche :

$$-\frac{1}{2}\,g\,t_f^2 = -h_C \quad\Longrightarrow\quad t_f = \sqrt{\frac{2\,h_C}{g}} = \sqrt{\frac{2\times 0{,}40}{9{,}8}}$$

$t_f = 0{,}29\ \mathrm{s}$

PIÈGE
Écrire $z = +h_C$ au sol : on obtient t^2 négatif. L'origine est en C et le sol est en dessous, à $z = -h_C$.

À LA CALCULATRICE



2.3.2 En déduire l'abscisse X_f du boulet quand il touche le sol. La cible est-elle atteinte ?

Données utiles $t_f = 0{,}29$ s (2.3.1) ; $D = 0{,}50$ m ; $\alpha = 30^\circ$; cible entre $X_1 = 0{,}55$ m et $X_2 = 0{,}60$ m

$$X_f = x(t_f) = \sqrt{2\,g\,D\sin\alpha} \times \sqrt{\frac{2\,h_C}{g}} = 2\sqrt{D\,h_C\sin\alpha}$$

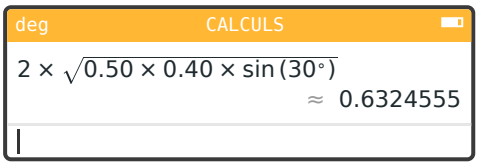
$$X_f = 2\sqrt{0{,}50 \times 0{,}40 \times \sin 30^\circ} = 0{,}63 \text{ m}$$

$X_f > X_2$: le boulet tombe au-delà de la cible.

$X_f = 0{,}63$ m : la cible n'est pas atteinte, le boulet tombe 3 cm trop loin.

PIÈGE
Multiplier les valeurs arrondies $2{,}2 \times 0{,}29$ donne $0{,}64$ m. Garder les valeurs non arrondies dans la calculatrice, ou passer par l'expression littérale.

À LA CALCULATRICE



2.4 Quelle distance D faudrait-il choisir pour atteindre la cible à l'abscisse $X_f = 0{,}57$ m, la durée de chute étant la même ?

Données utiles $X_f = 0{,}57$ m ; $h_C = 0{,}40$ m ; $\alpha = 30^\circ$

La durée de chute est inchangée, donc la relation $X_f = 2\sqrt{D\,h_C\sin\alpha}$ (2.3.2) reste valable. On isole D :

$$X_f^2 = 4\,D\,h_C\sin\alpha \quad\Longrightarrow\quad D = \frac{X_f^2}{4\,h_C\sin\alpha} = \frac{0{,}57^2}{4 \times 0{,}40 \times \sin 30^\circ}$$

$D = 0{,}41$ m

COMPRENDRE
Résultat cohérent : pour tomber moins loin, le boulet doit quitter C moins vite, donc partir de moins haut ($0{,}41$ m $< 0{,}50$ m). La durée de chute ne dépend que de h_C.

À LA CALCULATRICE

