étude d'un système solide-ressort

Bac S 2007 Asie (ancien programme) · Exercice 4 **5,5 points** **Durée conseillée 1 h 05**

1.1 Le mobile est-il écarté de sa position d'équilibre vers la droite ou vers la gauche ? Justifier.

Sur la figure 2, à $t = 0$, on lit $x(0) = 2{,}0\ \text{cm}$, valeur positive.

L'axe $x'x$ est orienté de gauche à droite et son origine est la position d'équilibre.

$x(0) > 0$: le mobile est écarté vers la **droite**.

COMPRENDRE
L'oscillateur solide-ressort ne figure plus au programme actuel de spécialité. L'exercice reste un bon entraînement sur la deuxième loi de Newton, la lecture de courbes et l'énergie mécanique.

1.2 Le mobile est-il lâché sans vitesse initiale ou lancé avec une vitesse initiale ? Justifier.

La vitesse est la dérivée de la position : $v_x = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, c'est-à-dire le coefficient directeur de la tangente à la courbe $x(t)$.

À $t = 0$, la courbe passe par un maximum : sa tangente est horizontale, donc $v_x(0) = 0$.

Le mobile est **lâché sans vitesse initiale**.

MÉTHODE
Sur une courbe $x(t)$, la vitesse se lit sur la pente : tangente horizontale, vitesse nulle ; pente la plus forte (passage par $x = 0$), vitesse maximale.

1.3 Déterminer la période du mouvement en expliquant la méthode utilisée.

La période est la plus petite durée au bout de laquelle le mobile repasse par la même position dans le même sens.

Pour gagner en précision, on mesure plusieurs périodes : entre le maximum de la date $t = 0$ et le troisième maximum, on lit $2T = 1{,}26\ \text{s}$.

$T = \dfrac{1{,}26}{2}$

$T = 0{,}63\ \text{s}$

PIÈGE
Mesurer la durée entre deux passages successifs par $x = 0$: on obtient une demi-période, car le mobile y passe une fois dans chaque sens.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs suffisent : la lecture sur l'axe des temps se fait à une ou deux graduations près, soit environ $0{,}02\ \text{s}$.

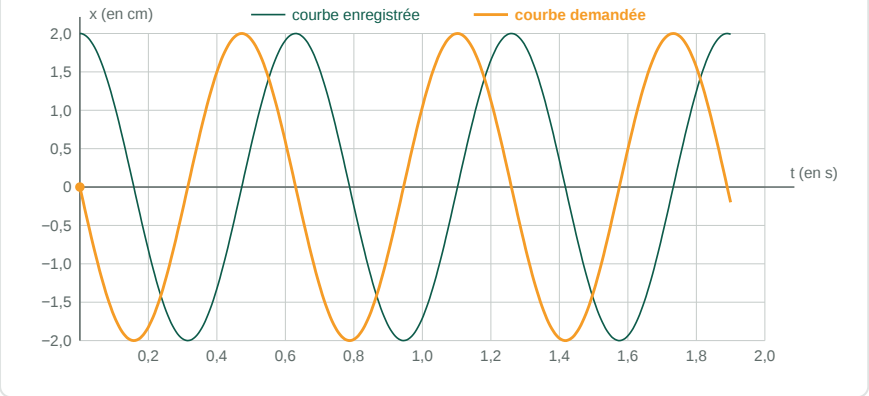
1.4 Représenter sur la figure 2 l'allure de la courbe obtenue si le mobile était lancé depuis sa position d'équilibre dans le sens des x négatifs, avec la même amplitude.

Conditions initiales : $x(0) = 0$ (départ de la position d'équilibre) et $v_x(0) < 0$ (la courbe part vers les valeurs négatives, avec une pente négative).

L'amplitude est inchangée ($2{,}0\ \text{cm}$) et la période aussi ($0{,}63\ \text{s}$), car elle ne dépend pas des conditions initiales.

Sinusoïde partant de l'origine en descendant : minimum $-2{,}0\ \text{cm}$ vers $0{,}16\ \text{s}$, retour à 0 vers $0{,}32\ \text{s}$, maximum $+2{,}0\ \text{cm}$ vers $0{,}47\ \text{s}$ (voir la figure).

PIÈGE
Modifier la période ou faire partir la courbe vers le haut. Seul le point de départ change : la courbe demandée est la courbe enregistrée décalée d'un quart de période.



1.4 · Figure 2 de l'annexe complétée : en orange, le mobile lancé depuis O vers les x négatifs

1.5 Décrire une méthode analytique donnant une valeur approchée de la vitesse du mobile à la date t_1 (aucun calcul demandé).

La vitesse est $v_x(t_1) = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{t_1}$.

On l'approche par la vitesse moyenne entre deux dates d'acquisition très proches qui encadrent t_1, notées t_0 et t_2 : on relève les positions $x(t_0)$ et $x(t_2)$ dans le tableau de mesures, puis on calcule le quotient.

$$v_x(t_1) \approx \frac{x(t_2) - x(t_0)}{t_2 - t_0}$$

COMPRENDRE
Ce quotient est le coefficient directeur de la tangente à la courbe à la date t_1 : on peut aussi tracer cette tangente et calculer sa pente. Ici la pente est positive, le mobile revient vers la droite.

2.1 Faire l'inventaire des forces qui s'exercent sur le solide et les représenter de façon cohérente sur la figure 4.

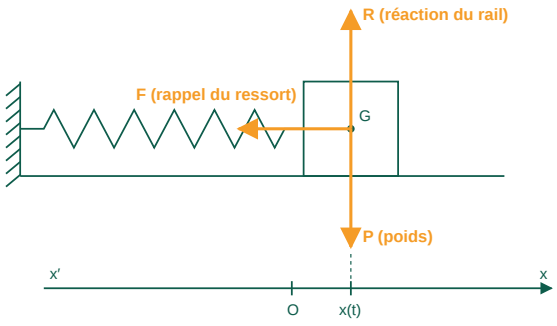
Système {solide}, référentiel terrestre supposé galiléen. Trois forces s'exercent sur le solide :

- son poids $\vec{P}$, vertical, vers le bas ;
- la réaction du rail $\vec{R}$, verticale et vers le haut car il n'y a pas de frottements ;
- la force de rappel du ressort $\vec{F} = -K\,x\,\vec{i}$, horizontale.

Sur la figure 4, $x(t) > 0$: le ressort est étiré, $\vec{F}$ est dirigée vers la gauche.

$\vec{P}$ et $\vec{R}$ ont la même longueur (elles se compensent) ; $\vec{F}$ est horizontale, vers la gauche.

PIÈGE
Dessiner $\vec{P}$ et $\vec{R}$ de longueurs différentes, ou orienter $\vec{F}$ vers la droite. Le mouvement est horizontal : les forces verticales doivent se compenser.



2.1 · Figure 4 de l'annexe complétée : les trois forces, tracées à partir de G

2.2 Avec la deuxième loi de Newton, montrer que l'équation différentielle du mouvement de G s'écrit $\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{K}{m}x(t) = 0$.

Deuxième loi de Newton appliquée au solide dans le référentiel terrestre galiléen :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m\,\vec{a}$$

En projection sur l'axe $x'x$, $\vec{P}$ et $\vec{R}$ étant perpendiculaires à l'axe :

$$0 + 0 - K\,x(t) = m\,\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}$$

On divise par m et on regroupe dans le même membre :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{K}{m}x(t) = 0}$$

MÉTHODE
Toujours dans cet ordre : système, référentiel, bilan des forces, loi vectorielle, projection sur l'axe du mouvement. Le signe « − » de $-Kx$ traduit le rappel vers la position d'équilibre.

2.3 Les solutions sont de la forme $x(t) = X_M \cos\left(2\pi\frac{t}{T_0} + \varphi\right)$. Déterminer les valeurs de X_M et φ correspondant à l'enregistrement de la figure 2.

Données utiles $x(0) = 2{,}0$ cm (1.1) ; $v_x(0) = 0$ (1.2) ; $\cos 0 = 1$

Position initiale : $x(0) = X_M \cos\varphi = 2{,}0$ cm.

Vitesse : $v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{2\pi}{T_0}X_M \sin\left(2\pi\frac{t}{T_0} + \varphi\right)$, donc $v_x(0) = -\frac{2\pi}{T_0}X_M \sin\varphi = 0$.

On en déduit $\sin\varphi = 0$, soit $\varphi = 0$ ou $\varphi = \pi$.

Avec $\varphi = \pi$, on aurait $X_M = -2{,}0$ cm : impossible, une amplitude est positive. Avec $\varphi = 0$: $X_M = 2{,}0$ cm.

$$\boxed{X_M = 2{,}0 \text{ cm et } \varphi = 0 \text{ rad}}$$

COMPRENDRE
X_M est l'amplitude : on la lit directement comme valeur maximale de x sur la figure 2. La phase φ fixe le point de départ sur la sinusoïde.

2.4 Donner l'expression de la période propre T_0 du mouvement en fonction de m et K.

$$\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}}$$

PIÈGE
Inverser le quotient. Un mobile plus lourd oscille plus lentement : m est au numérateur.

COMPRENDRE
Vérification par les unités : K est en $\mathrm{N\cdot m^{-1}}$, soit $\mathrm{kg\cdot s^{-2}}$; $\frac{m}{K}$ est donc en $\mathrm{s^2}$ et sa racine en secondes.

2.5 Vérifier que l'enregistrement de la figure 2 a été obtenu avec un mobile de masse $m = 100$ g et deux ressorts de raideur $k = 5{,}0$ N · m^{-1}.

Données utiles $K = 2k$; $2\pi = 6{,}3$ rad ; $T = 0{,}63$ s (1.3)

$m = 100$ g $= 0{,}100$ kg et $K = 2k = 2 \times 5{,}0 = 10$ N · m^{-1}.

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 6{,}3 \times \sqrt{\frac{0{,}100}{10}} = 6{,}3 \times \sqrt{1{,}0 \times 10^{-2}} = 6{,}3 \times 0{,}10$$

$T_0 = 0{,}63$ s, égale à la période $T = 0{,}63$ s mesurée sur la figure 2 : les valeurs proposées conviennent.

PIÈGE
Laisser la masse en grammes, ou utiliser k au lieu de $K = 2k$: dans les deux cas la période calculée ne correspond plus à l'enregistrement.

MÉTHODE
Sans calculatrice, écrire le nombre sous la racine avec une puissance de dix paire : $\sqrt{1{,}0 \times 10^{-2}} = 1{,}0 \times 10^{-1}$.

3.1 Donner l'expression du travail élémentaire $\mathrm{d}W$ de la force $\vec{F}_E$ exercée par l'élève au cours du déplacement élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$.

$\mathrm{d}W = \vec{F}_E \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l}$

COMPRENDRE
Sur un déplacement très petit, la force varie si peu qu'on peut la considérer constante : le travail s'écrit alors comme un produit scalaire ordinaire.

3.2 Montrer que, dans le cas présent, ce travail élémentaire se met sous la forme $\mathrm{d}W = K\,x\,\mathrm{d}x$.

L'élève déplace le solide lentement : la force qu'il exerce compense à chaque instant la force de rappel du ressort.

$\vec{F}_E = -\vec{F} = K\,x\,\vec{i}$

Le déplacement élémentaire se fait le long de l'axe : $\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mathrm{d}x\,\vec{i}$.

$\mathrm{d}W = K\,x\,\vec{i} \cdot \mathrm{d}x\,\vec{i}$, avec $\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$.

$\mathrm{d}W = K\,x\,\mathrm{d}x$

PIÈGE
Garder le signe « $-$ » de la force de rappel. C'est la force de l'élève qui travaille : elle est dans le sens du déplacement, son travail est positif.

3.3 Par une méthode au choix (analytique ou graphique), vérifier que le système acquiert au cours du déplacement l'énergie potentielle élastique $E_{PE} = \frac{1}{2}KX_M^2$.

Méthode analytique : le travail total est la somme des travaux élémentaires de $x = 0$ à $x = X_M$.

$$W(\vec{F}_E) = \int_0^{X_M} K\,x\,\mathrm{d}x = K\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{X_M} = \frac{1}{2}KX_M^2$$

Ce travail fourni par l'élève est emmagasiné par le système sous forme d'énergie potentielle élastique, nulle en $x = 0$.

$E_{PE} = W(\vec{F}_E) = \frac{1}{2}KX_M^2$

COMPRENDRE
Avec $K = 10\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}$ et $X_M = 2{,}0 \times 10^{-2}\ \mathrm{m}$, on trouve $E_{PE} = 2{,}0 \times 10^{-3}\ \mathrm{J}$: c'est le maximum de $2{,}0\ \mathrm{mJ}$ lu sur la figure 5.

MÉTHODE
Méthode graphique : tracer $F_E = Kx$ en fonction de x. Le travail est l'aire sous la droite entre 0 et X_M, un triangle de base X_M et de hauteur KX_M.

3.4 Pourquoi ne peut-on pas utiliser dans ce cas l'expression $W_{A\to B}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}$?

Cette expression n'est valable que pour une force constante pendant tout le déplacement.

La valeur de $\vec{F}_E$ dépend de x ($F_E = Kx$) : la force **n'est pas constante**, il faut sommer les travaux élémentaires.

3.5.1 Identifier les deux courbes de la figure 5 (énergie cinétique, énergie potentielle élastique) en justifiant.

$E_C = \frac{1}{2}mv^2$ et $E_{PE} = \frac{1}{2}Kx^2$.

À $t = 0$, le mobile est lâché sans vitesse : $E_C(0) = 0$. La courbe 2 (trait plein) part de zéro.

À $t = 0$, l'écart à l'équilibre est maximal, $x(0) = X_M$: E_{PE} est maximale. La courbe 1 (pointillés) part de son maximum.

Courbe 1 : énergie potentielle élastique ; courbe 2 : énergie cinétique.

COMPRENDRE
Les énergies varient deux fois plus vite que $x(t)$: leur période est $\frac{T_0}{2}$, soit environ $0{,}32\ \mathrm{s}$, car x^2 reprend la même valeur en $+X_M$ et en $-X_M$.

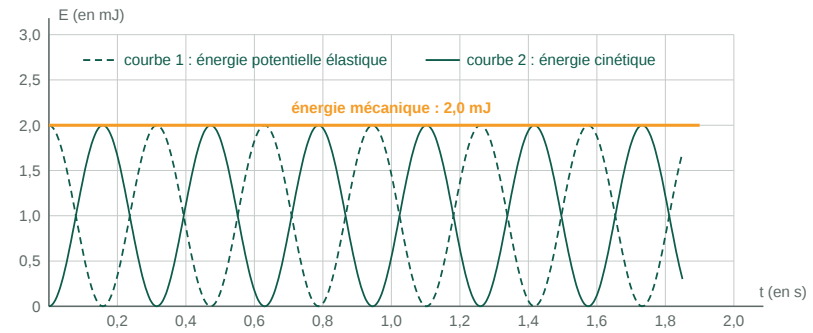
3.5.2 Tracer sur la figure 5 la courbe représentant l'évolution de l'énergie mécanique E_M du dispositif solide-ressort, en justifiant.

$E_M(t) = E_C(t) + E_{PE}(t)$ (le mouvement est horizontal, l'énergie potentielle de pesanteur ne varie pas).

Quand E_{PE} est maximale ($2{,}0\ \text{mJ}$), E_C est nulle, et inversement ; au croisement des courbes, chacune vaut $1{,}0\ \text{mJ}$. La somme vaut toujours $2{,}0\ \text{mJ}$.

$E_M = 2{,}0\ \text{mJ}$ à chaque instant : droite horizontale passant par les sommets des deux courbes.

MÉTHODE
Pour tracer une somme de deux courbes, additionner les ordonnées en quelques dates bien choisies : sommets, zéros, points de croisement.



3.5.2 · Figure 5 de l'annexe complétée : en orange, l'énergie mécanique

3.5.3 Pour un enregistrement de courte durée, l'énergie mécanique semble constante. Est-ce réellement le cas ? Pourquoi ?

Non. Même sur coussin d'air, il reste de faibles frottements (surtout ceux de l'air). Leur travail est résistant : une partie de l'énergie mécanique est peu à peu dissipée sous forme de chaleur.

L'énergie mécanique **diminue lentement** : sur une longue durée, l'amplitude des oscillations décroît.

COMPRENDRE
Sur deux secondes, la perte est trop faible pour être visible : les maximums de la figure 2 restent tous à $2{,}0\ \text{cm}$.