Asie 2007 EXERCICE II. ÉTUDE D'UN SYSTÈME SOLIDE-RESSORT (5,5 points)
Calculatrice interdite

Au cours d'une séance de travaux pratiques, un groupe d'élèves étudie le mouvement d'un mobile de masse m, posé sur un banc a coussin d'air horizontal et attaché à deux ressorts identiques de raideur k (figure 1).
Un capteur de position, non représenté sur la figure 1, relié à un dispositif d'acquisition permet d'enregistrer la position du centre d'inertie G du mobile à chaque instant de date t. Cette position est repérée sur un axe x'x horizontal, orienté de gauche à droite. L'origine O de l'axe coïncide avec la position du centre d'inertie lorsque le mobile est à l'équilibre.

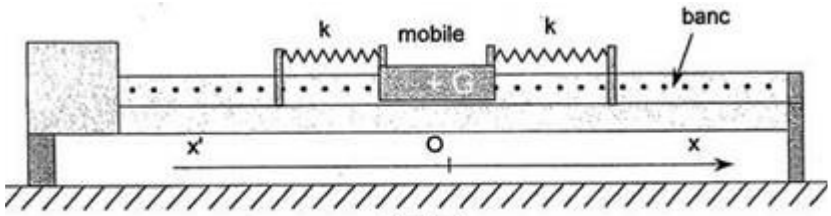


Figure 1

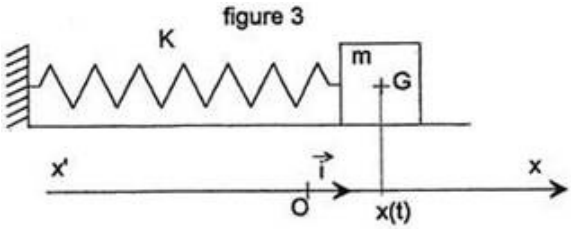
1. Étude d'un enregistrement.

Les élèves réalisent un premier enregistrement, d'une durée de deux secondes environ, en écartant le mobile de sa position d'équilibre. Cet enregistrement est reproduit sur la figure 2 ***DE L'ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE.***
À l'aide de ce document, répondre aux questions suivantes :

1.1. Le mobile est-il écarté de sa position d'équilibre vers la droite ou vers la gauche ? Justifier la réponse.
1.2. Le mobile est-il lâché sans vitesse initiale ou lancé avec une vitesse initiale ? Justifier la réponse.
1.3. Déterminer la période du mouvement en expliquant la méthode utilisée.
1.4. Représenter sur la figure 2 ***DE L'ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE***, l'allure de la courbe qu'obtiendrait le groupe d'élèves si le mobile était lancé avec une vitesse initiale depuis sa position d'équilibre dans le sens des x négatifs, l'amplitude du mouvement restant la même.
1.5. Décrire une méthode analytique permettant d'obtenir une valeur approchée de la vitesse du mobile à l'instant de date t_1. (Aucun calcul n'est demandé).

2. Étude théorique du mouvement.

Pour cette étude, le dispositif précédent peut être modélisé par un solide de masse m fixé à l'extrémité d'un seul ressort à spires non jointives, de masse négligeable et de raideur K = 2k. Le solide glisse sans frottements sur un rail horizontal (figure 3).
Le mouvement du solide est étudié dans le référentiel terrestre considéré galiléen pendant la durée de l'expérience.



2.1. Faire l'inventaire des forces qui s'exercent sur le solide et les représenter sans souci d'échelle mais de façon cohérente sur la figure 4 ***DE L'ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE***.

2.2 En utilisant la deuxième loi de Newton, montrer que l'équation différentielle du mouvement du centre d'inertie G du solide se met sous la forme : $\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\frac{K}{m}x(t)=0$.

2.3. *Cette équation différentielle admet pour solutions* $x(t)=X_M\cos(2\pi\frac{t}{T_0}+\varphi)$ *dans lesquelles* X_M *et* φ *sont des constantes qui dépendent des conditions initiales.*
Déterminer les valeurs de X_M et φ qui correspondent à l'enregistrement de la figure 2 de ***l'ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE.***
2.4. Donner l'expression en fonction de *m* et *K* de la période propre T_0 du mouvement.
2.5. Vérifier que l'enregistrement de la figure 2 de ***l'ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE***, a été obtenu avec un mobile de masse *m* = 100 g et deux ressorts de raideur *k* = 5,0 $N.m^{-1}$.

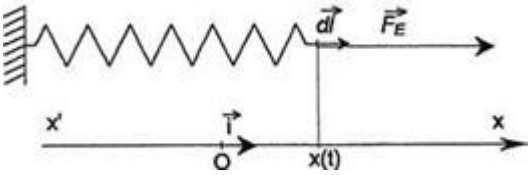
Aide au calcul : *On prendra* $2\pi = 6{,}3$ *rad.* $\cos 0 = 1$ $\cos \pi/2 = 0$

3. Étude énergétique.

Quand un élève déplace le centre d'inertie du solide de la position x = 0 à la position x = X_M, il effectue un travail et fournit au système de l'énergie potentielle élastique.

3.1. Donner l'expression du travail élémentaire *dW* de la force $\vec{F_E}$ exercée par l'élève au cours du déplacement élémentaire $\vec{dl}$.

Sur le schéma ci-contre, pour plus de clarté, le solide n'est pas représenté.



3.2. Montrer que dans le cas présent, ce travail élémentaire se met sous la forme *dW = Kxdx*.

3.3. Par une méthode de votre choix (méthode analytique ou méthode graphique), vérifier que le système acquiert au cours du déplacement, une énergie potentielle élastique $E_{PE} = \frac{1}{2} KX_M^2$.

3.4. Pourquoi ne peut-on pas utiliser dans ce cas l'expression $W_{A\to B}(\vec{F}) = \vec{F}.\overrightarrow{AB}$?

3.5. *La figure 5 de **L'ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE**, représente les évolutions en fonction du temps de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle élastique, calculées par l'ordinateur lors du premier enregistrement (figure 2 de **L'ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE**).*

3.5.1. Identifier es deux courbes en justifiant la réponse.

3.5.2. Tracer sur la figure 5 de ***L'ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE***, la courbe représentant l'évolution en fonction du temps de l'énergie mécanique E_M du dispositif solide-ressort en justifiant la réponse.

3.5.3. Pour un enregistrement de courte durée, l'énergie mécanique semble constante. Est-ce le cas réellement ? Pourquoi ?

ANNEXE DE L'EXERCICE II

À RENDRE AVEC LA COPIE

figure 2

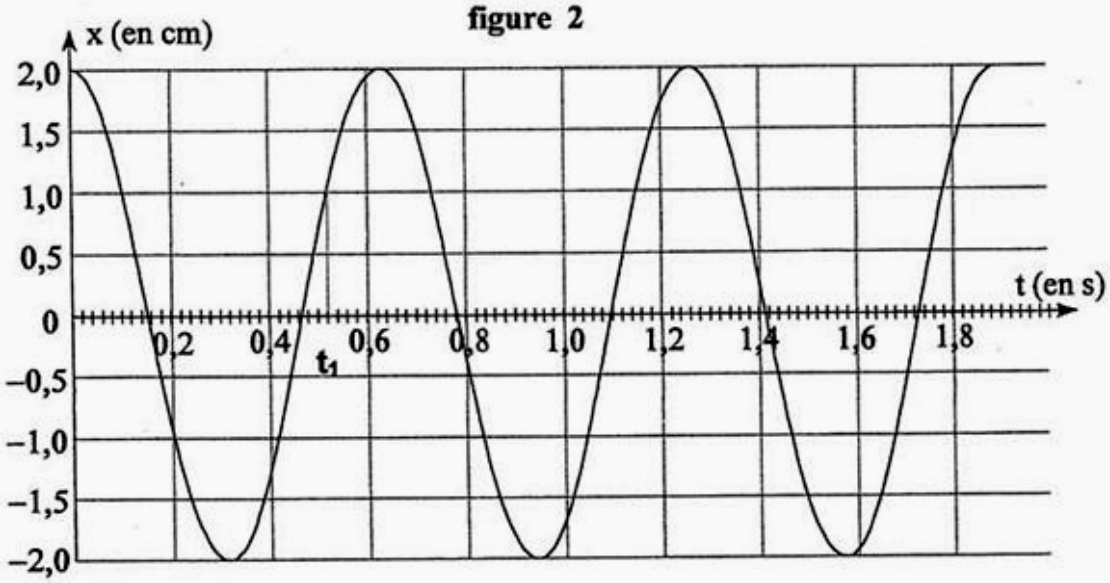


figure 4

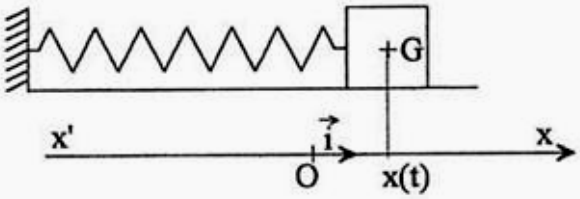


figure 5

