Lancement d'un satellite météorologique

Bac S 2008 Métropole rattrapage (ancien programme) · Exercice 2 **5,5 points** **Durée conseillée 1 h 05**

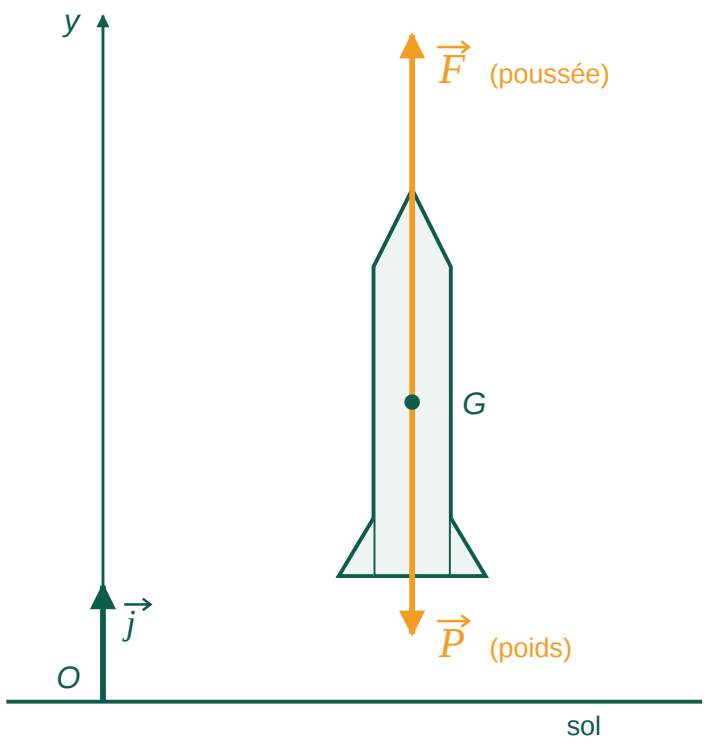
1.1.1 Sans calcul, représenter le poids $\vec{P}$ et la force de poussée $\vec{F}$ sur un schéma pendant le décollage.

Les deux forces sont verticales et appliquées à la fusée : le poids $\vec{P}$ vers le bas, la poussée $\vec{F}$ vers le haut.

La fusée décolle, donc $F > P$: la flèche de $\vec{F}$ est tracée plus longue que celle de $\vec{P}$.

$\vec{F}$ vers le haut, $\vec{P}$ vers le bas, avec $F > P$ (schéma).

PIÈGE
Dessiner deux flèches de même longueur : la fusée resterait immobile ou en mouvement uniforme. Le schéma doit montrer que la poussée l'emporte.



1.1.1 · Forces sur la fusée pendant le décollage : la flèche de la poussée est plus longue que celle du poids

1.1.2 En appliquant une loi de Newton au système {fusée}, trouver l'expression littérale de la valeur a de l'accélération dès que la fusée a quitté le sol.

Système {fusée}, de masse M constante ; référentiel terrestre supposé galiléen ; forces : $\vec{P}$ et $\vec{F}$.

Deuxième loi de Newton : $\vec{F} + \vec{P} = M\,\vec{a}$.

En projection sur l'axe (Oy), orienté vers le haut : $F - M\,g = M\,a$.

$$a = \frac{F}{M} - g$$

MÉTHODE
Toujours dans cet ordre : système, référentiel, bilan des forces, loi vectorielle, puis projection sur l'axe. Le signe de chaque terme vient du sens de la force par rapport à $\vec{j}$.

1.1.3 Calculer la valeur de cette accélération a.

Données utiles $M = 7{,}3 \times 10^5$ kg ; $F = 1{,}16 \times 10^7$ N ; $g = 10\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$; aide au calcul : $\dfrac{1{,}16}{7{,}3} \approx 1{,}6 \times 10^{-1}$

$$a = \frac{1{,}16 \times 10^7}{7{,}3 \times 10^5} - 10 = 1{,}6 \times 10^{-1} \times 10^2 - 10 = 16 - 10$$

$\boxed{a = 6\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}}$

PIÈGE
Sans calculatrice, choisir la bonne aide : c'est le quotient $\dfrac{1{,}16}{7{,}3}$ qui sert, pas le produit ni le quotient inverse. Ne pas oublier de retrancher g.

COMPRENDRE
Chiffres significatifs : $\dfrac{F}{M} = 16\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ et $g = 10\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ sont connus à l'unité près ; leur différence aussi. On écrit donc 6, sans décimale.

1.1.4 L'accélération restant constante, déterminer l'équation horaire de la valeur $v(t)$ de la vitesse.

Données utiles $a = 6\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ (1.1.3) ; fusée immobile à $t_0 = 0$ s

Par définition, $a = \dfrac{\text{d}v}{\text{d}t}$ avec a constante. Une primitive donne $v(t) = a\,t + C_1$.

Condition initiale : $v(0) = 0$, donc $C_1 = 0$.

$\boxed{v(t) = a\,t = 6\,t \text{ (avec } v \text{ en m} \cdot \text{s}^{-1} \text{ et } t \text{ en s)}}$

1.1.5 En déduire l'équation horaire de la valeur $y(t)$ de la position.

Données utiles $v(t) = 6\,t$ (1.1.4) ; G confondu avec O à $t_0 = 0$ s

Par définition, $v = \dfrac{\text{d}y}{\text{d}t} = a\,t$. Une primitive donne $y(t) = \dfrac{1}{2}\,a\,t^2 + C_2$.

Condition initiale : $y(0) = 0$, donc $C_2 = 0$.

$\boxed{y(t) = \dfrac{1}{2}\,a\,t^2 = 3\,t^2 \text{ (avec } y \text{ en m et } t \text{ en s)}}$

PIÈGE
Oublier les constantes d'intégration, ou ne pas les justifier. Même nulles, elles se déterminent avec les conditions initiales de l'énoncé.

1.1.6 La trajectoire reste verticale jusqu'à la date t_1. Quelle distance la fusée a-t-elle parcourue depuis son décollage ?

Données utiles $t_1 = 6{,}0$ s ; $y(t) = 3\,t^2$ (1.1.5)

La fusée part de O et monte verticalement : la distance parcourue est $d = y(t_1)$.

$$d = 3 \times 6{,}0^2 = 3 \times 36 = 108\ \text{m}$$

$\boxed{d \approx 1{,}1 \times 10^2\ \text{m}}$

1.2 En réalité, Ariane 5 a parcouru un peu moins de 90 m pendant les 6 premières secondes. Citer un phénomène permettant d'interpréter cette donnée.

Données utiles $d \approx 1{,}1 \times 10^2$ m dans le cas idéal (1.1.6)

La distance réelle (moins de 90 m) est inférieure à celle du modèle (environ 110 m) : l'accélération réelle est plus faible que prévu.

Le modèle néglige les frottements de l'air. Cette force, opposée au mouvement, s'ajoute au poids et diminue l'accélération.

$\boxed{\text{Phénomène : les frottements de l'air sur la fusée.}}$

COMPRENDRE
Un seul phénomène est demandé. La masse, elle, diminue quand les ergols sont éjectés : cela augmenterait l'accélération, ce qui n'explique donc pas une distance plus courte.

2.1 Donner l'expression vectorielle de la force gravitationnelle $\vec{F}_{T/S}$ exercée par la Terre sur le satellite en fonction des données.

La distance entre le centre T de la Terre et le satellite S est $TS = R_T + h$. La force est attractive, donc dirigée de S vers T, comme $\vec{n}$.

$$\vec{F}_{T/S} = G\,\frac{m\,M_T}{(R_T+h)^2}\,\vec{n}$$

PIÈGE
Écrire h^2 au dénominateur : la distance se compte entre les centres, pas depuis le sol. Pas de signe « $-$ » non plus, puisque $\vec{n}$ pointe déjà vers la Terre.

2.2 En appliquant une loi de Newton, trouver l'expression du vecteur accélération $\vec{a}_S$ du centre d'inertie du satellite.

Système {satellite}, de masse m constante ; référentiel géocentrique supposé galiléen ; seule force : $\vec{F}_{T/S}$.

Deuxième loi de Newton : $\vec{F}_{T/S} = m\,\vec{a}_S$, soit $G\,\dfrac{m\,M_T}{(R_T+h)^2}\,\vec{n} = m\,\vec{a}_S$.

$$\vec{a}_S = \frac{G\,M_T}{(R_T+h)^2}\,\vec{n}$$

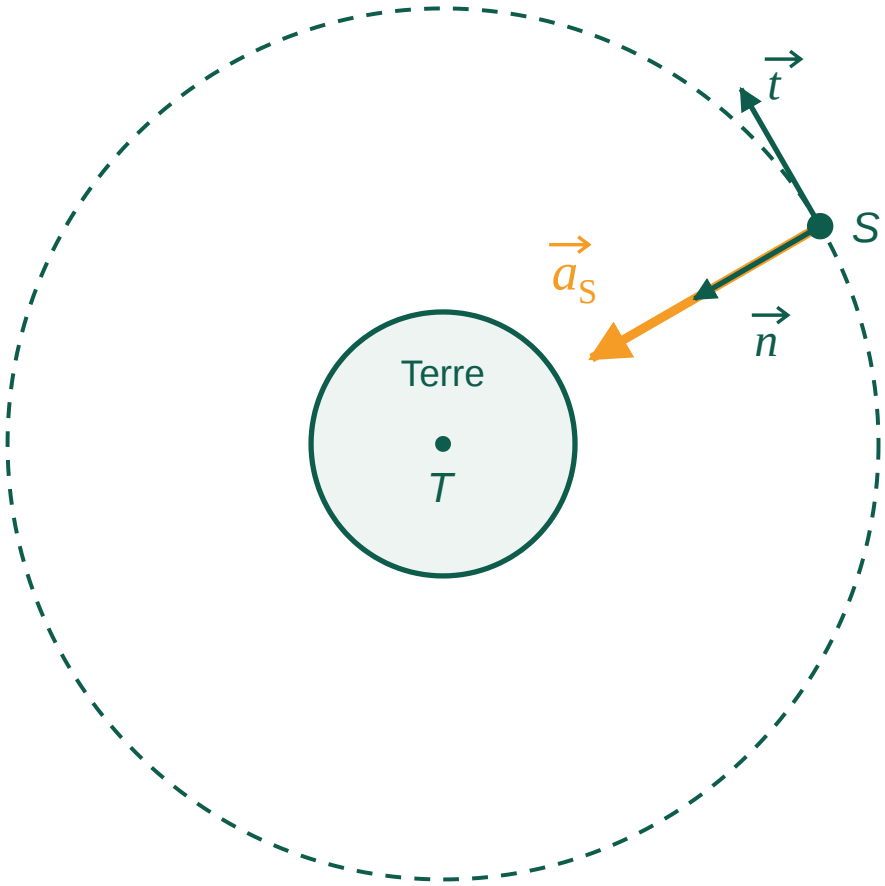
COMPRENDRE
La masse m du satellite se simplifie : l'accélération, donc le mouvement, ne dépend pas du satellite mais seulement de la Terre et de l'altitude.

2.3 Sans souci d'échelle, représenter sur un schéma, à une date t quelconque, la Terre, le satellite, le repère $(S, \vec{t}, \vec{n})$ et le vecteur accélération $\vec{a}_S$.

Le vecteur $\vec{t}$ est tangent au cercle, dans le sens du mouvement ; $\vec{n}$ est porté par le rayon et pointe vers T.

D'après 2.2, $\vec{a}_S$ a la direction et le sens de $\vec{n}$: il part de S et pointe vers le centre de la Terre.

$\vec{a}_S$ est radial et centripète (schéma).



orbite circulaire basse

2.3 · Le vecteur accélération est porté par la droite (ST) et dirigé vers le centre T de la Terre

2.4 Déterminer l'expression de la vitesse v_S du centre d'inertie du satellite. Vérifier que sa valeur est de l'ordre de $7{,}6 \times 10^3\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ sur son orbite basse.

Données utiles $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$; $M_T = 6{,}0 \times 10^{24}$ kg ; $R_T = 6{,}4 \times 10^3$ km ; $h = 6{,}0 \times 10^2$ km ; aides au calcul : $6{,}67 \times 6{,}0 \approx 4{,}0 \times 10^1$ et $\sqrt{\dfrac{4{,}0}{7{,}0}} \approx 7{,}6 \times 10^{-1}$

Le mouvement est circulaire et uniforme, de rayon $R_T + h$:

l'accélération est centripète et vaut $\vec{a}_S = \dfrac{v_S^2}{R_T + h}\vec{n}$.

En égalant avec l'expression de 2.2 : $\dfrac{v_S^2}{R_T + h} = \dfrac{G\,M_T}{(R_T + h)^2}$, d'où

$$v_S = \sqrt{\frac{G\,M_T}{R_T + h}}$$

Avec $R_T + h = 6{,}4 \times 10^6 + 0{,}60 \times 10^6 = 7{,}0 \times 10^6$ m :

$$v_S = \sqrt{\frac{6{,}67 \times 10^{-11} \times 6{,}0 \times 10^{24}}{7{,}0 \times 10^6}} = \sqrt{\frac{4{,}0 \times 10^{14}}{7{,}0 \times 10^6}} = \sqrt{\frac{4{,}0}{7{,}0}} \times 10^4$$

$v_S = 7{,}6 \times 10^{-1} \times 10^4 = 7{,}6 \times 10^3\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$: c'est la valeur attendue.

PIÈGE
Laisser R_T et h en kilomètres : avec G en unités SI, les distances sont en mètres. Autre erreur fréquente : oublier d'ajouter R_T à l'altitude.

MÉTHODE
Sans calculatrice, regrouper les puissances de dix pour faire apparaître une puissance paire sous la racine : $\sqrt{10^8} = 10^4$. Il reste alors exactement une des aides au calcul.

2.5 Comment appelle-t-on le temps T mis par le satellite pour faire un tour autour de la Terre ? Montrer que $T^2 = \dfrac{4\pi^2(R_T+h)^3}{G\,M_T}$.

Données utiles $v_S^2 = \dfrac{G\,M_T}{R_T+h}$ (2.4)

T est la **période de révolution** du satellite.

À vitesse constante, le satellite parcourt le périmètre de l'orbite pendant une période : $v_S = \dfrac{2\pi(R_T+h)}{T}$, donc $T^2 = \dfrac{4\pi^2(R_T+h)^2}{v_S^2}$.

En remplaçant v_S^2 par son expression : $T^2 = 4\pi^2(R_T+h)^2 \times \dfrac{R_T+h}{G\,M_T}$.

$T^2 = \dfrac{4\pi^2(R_T+h)^3}{G\,M_T}$: c'est la relation attendue.

COMPRENDRE
On retrouve la troisième loi de Kepler : $\dfrac{T^2}{(R_T+h)^3} = \dfrac{4\pi^2}{G\,M_T}$ est une constante, la même pour tous les satellites de la Terre.

3.1 Énoncer la deuxième loi de Kepler, ou « loi des aires ».

Le segment qui relie le centre de la Terre au satellite balaie des aires égales pendant des durées égales.

COMPRENDRE
La loi est énoncée ici pour un satellite de la Terre. Pour une planète, le segment relie le centre du Soleil à celui de la planète.

3.2 Montrer que la vitesse du satellite n'est pas constante sur son orbite de transfert. Préciser en quels points sa vitesse est maximale, minimale.

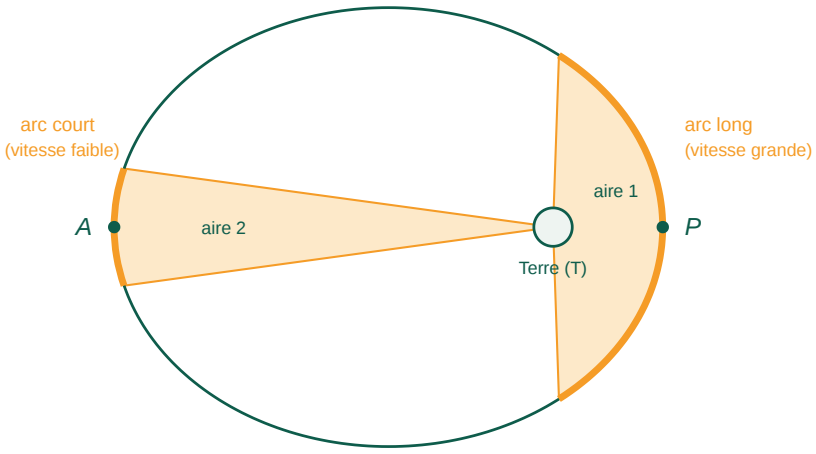
On considère deux durées égales Δt, l'une autour de P, l'autre autour de A. D'après la loi des aires, les deux aires balayées par le segment [TS] sont égales.

Près de P, le satellite est proche de la Terre : pour balayer la même aire, il doit parcourir un arc plus long que près de A, où le segment [TS] est grand.

Une distance plus grande pendant la même durée : la vitesse est plus grande près de P que près de A. Elle n'est donc pas constante.

Vitesse maximale au périgée P, minimale à l'apogée A.

PIÈGE
Se contenter d'affirmer « maximale en P ». La justification attendue passe par la loi des aires : mêmes aires, mêmes durées, arcs de longueurs différentes.



3.2 · Loi des aires sur l'orbite de transfert : deux aires égales balayées pendant la même durée

3.3 Exprimer la distance AP en fonction de R_T, h et h'. Montrer que $AP = 4{,}9 \times 10^7$ m.

Données utiles $R_T = 6{,}4 \times 10^3$ km ; $h = 6{,}0 \times 10^2$ km ; $h' = 3{,}6 \times 10^4$ km

A, T et P sont alignés, avec T entre A et P : $AP = AT + TP = (R_T + h') + (R_T + h)$.

$$AP = 2\,R_T + h + h'$$

En mètres : $2\,R_T = 1{,}28 \times 10^7$ m ; $h = 0{,}06 \times 10^7$ m ; $h' = 3{,}6 \times 10^7$ m.

$$AP = (1{,}28 + 0{,}06 + 3{,}6) \times 10^7 = 4{,}94 \times 10^7 \text{ m}$$

$AP \approx 4{,}9 \times 10^7$ m : c'est la valeur attendue.

PIÈGE
Compter une seule fois le rayon terrestre : les altitudes h et h' se mesurent depuis le sol, de part et d'autre de la Terre. Écrire tous les termes avec la même puissance de dix avant d'additionner.

3.4 Déterminer la durée minimale Δt du transfert du satellite du point P de son orbite basse au point A de son orbite géostationnaire.

Données utiles durée de révolution sur l'orbite elliptique : $T' = 10\text{ h }42\text{ min}$

P et A sont les deux extrémités du grand axe de l'ellipse : aller de P à A, c'est parcourir une moitié de l'orbite de transfert. Par symétrie, cette moitié dure une demi-période.

$$\Delta t = \frac{T'}{2} = \frac{10\text{ h }42\text{ min}}{2}$$

$\Delta t = 5\text{ h }21\text{ min}$

COMPRENDRE
La vitesse varie, mais les deux moitiés de l'ellipse (de P à A, puis de A à P) sont symétriques par rapport au grand axe : chacune dure bien $\frac{T'}{2}$. La durée est minimale car le satellite peut aussi faire des tours supplémentaires.

3.5 Expliquer pourquoi il est judicieux de lancer les satellites géostationnaires d'un lieu proche de l'équateur comme Kourou en Guyane.

Un satellite géostationnaire reste à la verticale d'un même point du sol : son orbite est dans le plan de l'équateur et il tourne dans le même sens que la Terre.

Deux avantages à un tir proche de l'équateur :

- la fusée part presque dans le plan de l'orbite visée : peu de corrections de trajectoire, donc peu de carburant pour y amener le satellite ;
- la vitesse du sol due à la rotation de la Terre est la plus grande à l'équateur : en tirant vers l'est, la fusée profite de cette vitesse initiale.

Près de l'équateur, on économise du carburant : orbite déjà presque équatoriale et vitesse de rotation de la Terre maximale.