A propos des sous-marins

Bac S 2008 Nouvelle-Calédonie (ancien programme) · Exercice 3 **5,5 points** **Durée conseillée 1 h 05**

1.1.1 Donner l'expression littérale de la valeur F_A de la poussée d'Archimède exercée sur le bathyscaphe complètement immergé, puis la calculer.

Données utiles $V = 194\ \text{m}^3$; $\rho_E = 1{,}03 \times 10^3\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$; $g = 9{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$

La poussée d'Archimède a pour valeur le poids du volume d'eau de mer déplacé. Le bathyscaphe étant entièrement immergé, ce volume est V :

$$F_A = \rho_E\, V\, g$$

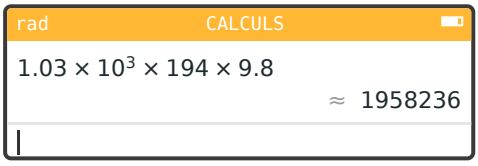
$$F_A = 1{,}03 \times 10^3 \times 194 \times 9{,}8 = 1{,}96 \times 10^6\ \text{N}$$

$$\boxed{F_A = \rho_E\, V\, g \approx 2{,}0 \times 10^6\ \text{N}}$$

PIÈGE
Utiliser ρ_L ou V_L : la poussée dépend du fluide déplacé (l'eau de mer) et du volume total immergé, pas de ce que contient le flotteur.

COMPRENDRE
g n'est donné qu'avec deux chiffres significatifs : le résultat s'écrit $2{,}0 \times 10^6$ N. On garde $1{,}96 \times 10^6$ N comme valeur intermédiaire pour la comparaison qui suit.

À LA CALCULATRICE



1.1.2 Comparer les valeurs du poids du bathyscaphe et de la poussée d'Archimède qu'il subit. Que peut-on en conclure ?

Données utiles $M = 200\ \text{t}$; $g = 9{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$; F_A (1.1.1)

Poids : $P = M\, g = 200 \times 10^3 \times 9{,}8 = 1{,}96 \times 10^6\ \text{N} \approx 2{,}0 \times 10^6\ \text{N}$.

Les deux forces sont verticales, de sens opposés et de même valeur : $\overrightarrow{P} + \overrightarrow{F_A} = \vec{0}$.

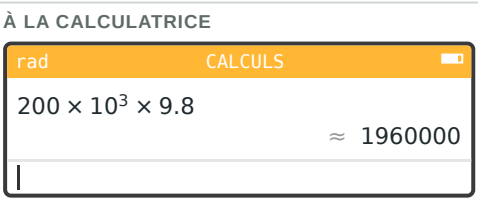
D'après le principe d'inertie, le bathyscaphe, initialement au repos dans le référentiel terrestre, y reste.

$\boxed{P = F_A \approx 2{,}0 \times 10^6\ \text{N}}$: les forces se compensent, le bathyscaphe reste immobile entre deux eaux.

PIÈGE
Laisser la masse en tonnes : $200\ \text{t} = 200 \times 10^3\ \text{kg}$. Sans conversion, le poids est mille fois trop petit et la comparaison n'a plus de sens.

COMPRENDRE
Des forces qui se compensent autorisent aussi un mouvement rectiligne uniforme. C'est l'énoncé (« ne plonge pas encore ») qui permet de retenir l'immobilité.

À LA CALCULATRICE



1.2.1 Le bathyscaphe remplace un volume V_L' de liquide « L » par le même volume d'eau de mer. La valeur F_A de la poussée d'Archimède varie-t-elle ?

$F_A = \rho_E\, V\, g$ ne dépend que de la masse volumique de l'eau de mer, du volume extérieur du bathyscaphe et de g. L'échange de liquide se fait à l'intérieur du flotteur : aucune de ces trois grandeurs n'est modifiée.

$\boxed{F_A \text{ ne varie pas : elle vaut toujours } \rho_E\, V\, g.}$

COMPRENDRE
La poussée d'Archimède ignore la masse de l'objet et ce qu'il contient. Seul son volume immergé compte.

1.2.2 Déterminer l'expression littérale de la variation de masse ΔM du bathyscaphe (comptée positivement), puis la calculer.

Données utiles $V'_E = V'_L = 2{,}0\ \text{m}^3$; $\rho_E = 1{,}03 \times 10^3\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$; $\rho_L = 0{,}66 \times 10^3\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$

Le bathyscaphe gagne la masse d'eau de mer $\rho_E\, V'_E$ et perd la masse de liquide « L » $\rho_L\, V'_L$. Comme $V'_E = V'_L$:

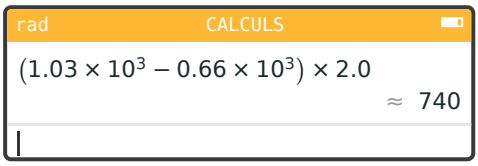
$$\Delta M = \rho_E\, V'_E - \rho_L\, V'_L = (\rho_E - \rho_L)\, V'_L$$

$$\Delta M = (1{,}03 \times 10^3 - 0{,}66 \times 10^3) \times 2{,}0$$

$$\boxed{\Delta M = (\rho_E - \rho_L)\, V'_L = 7{,}4 \times 10^2\ \text{kg}}$$

COMPRENDRE
Cette valeur redonne la masse annoncée ensuite par l'énoncé : $200\ \text{t} + 0{,}74\ \text{t} = 200{,}74\ \text{t}$.

À LA CALCULATRICE



1.2.3 Expliquer pourquoi le bathyscaphe se met à descendre.

La masse augmente de ΔM, donc le poids augmente : $P' = (M + \Delta M)\, g > P$. La poussée d'Archimède, elle, est inchangée (1.2.1) et valait P.

Donc $P' > F_A$: la somme des forces n'est plus nulle, elle est verticale et dirigée vers le bas. D'après la deuxième loi de Newton, l'accélération a ce même sens ; le bathyscaphe, parti du repos, se met en mouvement vers le bas.

$\boxed{P' > F_A \text{ : la résultante des forces est dirigée vers le bas, le bathyscaphe descend.}}$

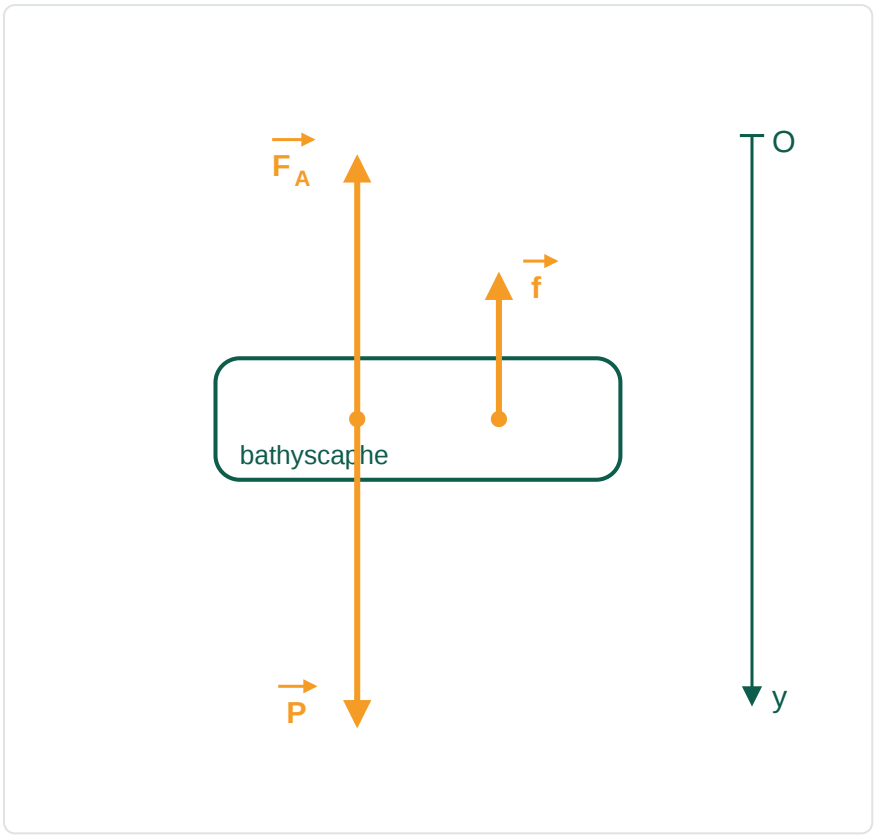
1.3.1 Faire le bilan des forces exercées sur le bathyscaphe quand il descend et les représenter, sans échelle, sur un schéma.

Système {bathyscaphe}, référentiel terrestre supposé galiléen. Trois forces, toutes verticales :

- le poids $\overrightarrow{P}$, vers le bas ;
- la poussée d'Archimède $\overrightarrow{F_A}$, vers le haut ;
- la force de frottement $\overrightarrow{f}$ exercée par l'eau de mer, opposée au mouvement, donc vers le haut.

Trois forces : $\overrightarrow{P}$ vers le bas, $\overrightarrow{F_A}$ et $\overrightarrow{f}$ vers le haut (schéma ci-contre).

PIÈGE
Orienter $\overrightarrow{f}$ vers le bas « comme le mouvement ». Un frottement fluide s'oppose toujours à la vitesse : le bathyscaphe descend, $\overrightarrow{f}$ est vers le haut.



1.3.1 · Forces exercées sur le bathyscaphe pendant la descente (sans échelle)

1.3.2 La force de frottement a pour valeur $f = k\,v^2$. Établir l'équation différentielle du mouvement selon un axe vertical descendant (Oy).

Données utiles masse du bathyscaphe M' ; $F_A = \rho_E\,V\,g$ (1.1.1)

Deuxième loi de Newton appliquée au bathyscaphe de masse M' constante, dans le référentiel terrestre galiléen :

$$\vec{P} + \vec{F_A} + \vec{f} = M'\,\vec{a}$$

En projection sur l'axe (Oy) orienté vers le bas, avec $a_y = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$:

$$M'\,g - \rho_E\,V\,g - k\,v^2 = M'\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

En divisant par M' :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g\left(1 - \frac{\rho_E\,V}{M'}\right) - \frac{k}{M'}\,v^2}$$

PIÈGE
L'axe est orienté vers le bas : le poids est compté positivement, la poussée et le frottement négativement. Une erreur de signe ici fausse toute la fin de la partie 1.

MÉTHODE
1) système et référentiel ; 2) bilan des forces ; 3) deuxième loi de Newton en vecteurs ; 4) projection sur l'axe en soignant les signes ; 5) division par la masse pour isoler la dérivée.

1.3.3 La vitesse limite atteinte est v_{lim}. a. Déterminer son expression littérale. b. En déduire la valeur de k et justifier son unité par une analyse dimensionnelle.

Données utiles $v_{lim} = 1{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $M' = 200{,}74\ \text{t}$; $\rho_E = 1{,}03\times10^{3}\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$; $V = 194\ \text{m}^3$; $g = 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

a. Quand la vitesse limite est atteinte, v ne varie plus : $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$.
L'équation différentielle devient :

$$g\left(1-\frac{\rho_E V}{M'}\right) - \frac{k}{M'}v_{lim}^2 = 0 \quad \text{soit} \quad v_{lim} = \sqrt{\frac{(M'-\rho_E V)\,g}{k}}$$

b. On en tire $k = \dfrac{(M'-\rho_E V)\,g}{v_{lim}^2}$:

$$k = \frac{(200{,}74\times10^3 - 1{,}03\times10^3\times194)\times 9{,}8}{1{,}0^2} = 9{,}0\times10^3$$

Unité : $k = \dfrac{f}{v^2}$. Une force est une masse multipliée par une accélération : $[f] = \text{M}\cdot\text{L}\cdot\text{T}^{-2}$, et $[v^2] = \text{L}^2\cdot\text{T}^{-2}$.

$$[k] = \frac{\text{M}\cdot\text{L}\cdot\text{T}^{-2}}{\text{L}^2\cdot\text{T}^{-2}} = \text{M}\cdot\text{L}^{-1}$$

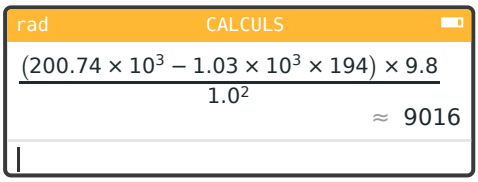
$v_{lim} = \sqrt{\dfrac{(M'-\rho_E V)\,g}{k}}$ et $k = 9{,}0\times10^3\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-1}$

PIÈGE
Arrondir M' à 200 t ou $\rho_E V$ à $2{,}0\times10^5$ kg : k dépend de leur différence, 920 kg seulement. Il faut garder tous les chiffres de l'énoncé dans le calcul.

COMPRENDRE
À la vitesse limite, les forces se compensent de nouveau : $P = F_A + f$. Le mouvement devient rectiligne uniforme.

MÉTHODE
Analyse dimensionnelle : isoler la grandeur, remplacer chaque terme par sa dimension (M, L, T), simplifier, puis traduire en unités SI : $\text{M}\cdot\text{L}^{-1}$ donne $\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}$.

À LA CALCULATRICE



2.1 Donner la structure du noyau noté $^{235}_{92}\text{U}$.

$Z = 92$: le noyau contient 92 protons. $A = 235$ nucléons, donc $A - Z = 235 - 92 = 143$ neutrons.

Noyau d'uranium 235 : 92 protons et 143 neutrons.

PIÈGE
Annoncer 235 neutrons, ou ajouter 92 électrons : A compte les nucléons (protons et neutrons), et un noyau ne contient pas d'électrons.

2.2.1 Dans l'équation de fission $^{235}_{92}\text{U} + {}^{1}_{0}\text{n} \longrightarrow {}^{94}_{38}\text{Sr} + {}^{140}_{54}\text{Xe} + \text{x}\ {}^{1}_{0}\text{n}$, montrer que $x = 2$.

Lors d'une réaction nucléaire, le nombre de nucléons se conserve (loi de Soddy) :

$$235 + 1 = 94 + 140 + x\times1 \quad \text{donc} \quad x = 236 - 234 = 2$$

Vérification par la conservation de la charge : $92 + 0 = 38 + 54 + x\times0$, soit $92 = 92$.

$x = 2$: la fission libère deux neutrons.

COMPRENDRE
La conservation de la charge ne permet pas de trouver x puisque le neutron a une charge nulle : elle sert seulement de contrôle.

2.2.2 Montrer que l'énergie libérée par la fission d'un noyau d'uranium 235 vaut $E_{lib} = 2{,}91 \times 10^{-11}$ J.

Données utiles $m(\mathrm{U}) = 235{,}0439$ u ; $m(\mathrm{Sr}) = 93{,}9154$ u ; $m(\mathrm{Xe}) = 139{,}9252$ u ; $m(\mathrm{n}) = 1{,}0087$ u ; $1\ \mathrm{u} = 1{,}66 \times 10^{-27}$ kg ; $c = 3{,}00 \times 10^{8}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

Variation de masse au cours de la réaction (produits moins réactifs) :

$\Delta m = m(\mathrm{Sr}) + m(\mathrm{Xe}) + 2\,m(\mathrm{n}) - m(\mathrm{U}) - m(\mathrm{n}) = m(\mathrm{Sr}) + m(\mathrm{Xe}) + m(\mathrm{n}) - m(\mathrm{U})$

$\Delta m = 93{,}9154 + 139{,}9252 + 1{,}0087 - 235{,}0439 = -0{,}1946$ u

La masse diminue : l'énergie libérée est $E_{lib} = |\Delta m|\, c^2$.

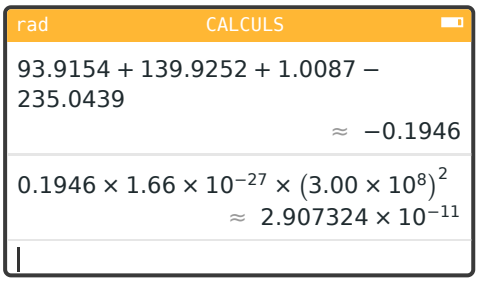
$$E_{lib} = 0{,}1946 \times 1{,}66 \times 10^{-27} \times (3{,}00 \times 10^{8})^2$$

$E_{lib} = 2{,}91 \times 10^{-11}$ J, valeur attendue.

PIÈGE
Oublier de convertir Δm en kilogrammes, ou oublier le neutron incident dans le bilan : il reste un seul neutron de plus du côté des produits.

COMPRENDRE
Le signe négatif de Δm traduit une perte de masse : le système cède de l'énergie à l'extérieur. L'énergie libérée est la valeur positive correspondante.

À LA CALCULATRICE



2.2.3 Le réacteur fournit une puissance moyenne de 150 MW. a. Montrer qu'il se produit $5{,}15 \times 10^{18}$ fissions par seconde. b. En déduire que la masse d'uranium consommée en 1 s vaut $2{,}01 \times 10^{-3}$ g.

Données utiles $\mathcal{P} = 150$ MW ; $E_{lib} = 2{,}91 \times 10^{-11}$ J (2.2.2) ; $N_A = 6{,}02 \times 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$; $M(\mathrm{U}) = 235\ \mathrm{g \cdot mol^{-1}}$

a. En une durée $\Delta t = 1$ s, le réacteur fournit l'énergie $E = \mathcal{P}\,\Delta t$. Cette énergie provient de N fissions : $E = N\,E_{lib}$.

$$N = \frac{\mathcal{P}\,\Delta t}{E_{lib}} = \frac{150 \times 10^{6} \times 1}{2{,}91 \times 10^{-11}} = 5{,}15 \times 10^{18}$$

b. Chaque fission consomme un noyau d'uranium 235 : en 1 s, N noyaux disparaissent, soit une quantité de matière $n = \dfrac{N}{N_A}$.

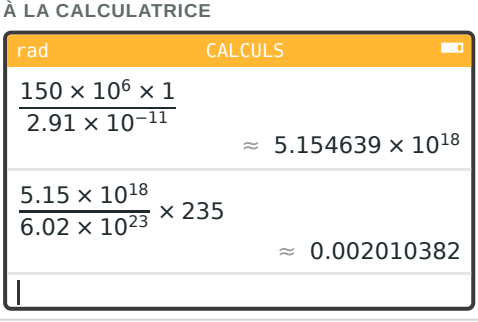
$$m = n\,M(\mathrm{U}) = \frac{N}{N_A}\,M(\mathrm{U}) = \frac{5{,}15 \times 10^{18}}{6{,}02 \times 10^{23}} \times 235 = 2{,}01 \times 10^{-3}\ \mathrm{g}$$

$N = 5{,}15 \times 10^{18}$ fissions par seconde et $m = 2{,}01 \times 10^{-3}$ g par seconde, valeurs attendues.

PIÈGE
Laisser la puissance en mégawatts : $150\ \mathrm{MW} = 150 \times 10^{6}$ W, c'est-à-dire 150×10^{6} joules chaque seconde.

COMPRENDRE
Autre chemin pour b : $m = N \times m(\mathrm{U})$ avec $m(\mathrm{U}) = 235{,}0439 \times 1{,}66 \times 10^{-27}$ kg. On retrouve $2{,}01 \times 10^{-6}$ kg, soit la même valeur.

À LA CALCULATRICE



2.2.4 Le sous-marin doit naviguer 2 mois. Quelle masse minimale d'uranium 235 doit-il embarquer ?

Données utiles $m = 2{,}01 \times 10^{-3}$ g par seconde (2.2.3) ; $1 \text{ mois} = 2{,}6 \times 10^{6}$ s

Durée de navigation : $\Delta t = 2 \times 2{,}6 \times 10^{6} = 5{,}2 \times 10^{6}$ s.

La consommation est de $2{,}01 \times 10^{-3}$ g chaque seconde :

$$m_{min} = 2{,}01 \times 10^{-3} \times 5{,}2 \times 10^{6} = 1{,}0 \times 10^{4} \text{ g}$$

$m_{min} \approx 1{,}0 \times 10^{4}$ g $= 10$ kg d'uranium 235.

COMPRENDRE

Deux chiffres significatifs, comme la durée d'un mois. C'est un minimum : tous les noyaux embarqués ne fissionnent pas et l'uranium enrichi contient surtout de l'uranium 238.

À LA CALCULATRICE

