Un jour d'orage

Bac S 2008 Nouvelle-Calédonie (ancien programme) · Exercice 2 **4 points** **Durée conseillée 52 min**

1.1 À partir du schéma électrique équivalent, montrer que la tension $u_C(t)$ vérifie pendant la décharge l'équation $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{\tau}u_C = 0$ (1), avec $\tau = rC$.

Loi des mailles, interrupteur fermé (les flèches u_C et u_r sont de sens opposés dans la maille) : $u_C + u_r = 0$.

Loi d'Ohm pour le conducteur ohmique, fléché en convention récepteur : $u_r = r\,i$.

Le courant i arrive sur l'armature qui porte la charge $+q$: $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$, avec $q = C\,u_C$ et C constante, donc $i = C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$.

On remplace : $u_C + rC\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = 0$. En divisant par rC :

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u_C = 0 \text{ avec } \tau = rC$$

PIÈGE

Écrire $i = -\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ « parce que c'est une décharge ». Le signe dépend seulement de l'orientation : ici la flèche i pointe vers l'armature $+q$, donc $i = +\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$.

MÉTHODE

Équation d'un circuit RC en trois lignes : loi des mailles, loi d'Ohm, relation $i = C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$. On substitue ensuite pour ne garder que u_C.

1.2 Vérifier par une analyse dimensionnelle que la constante de temps τ est homogène à un temps.

D'après $u_r = r\,i$: $[r] = \dfrac{[U]}{[I]}$.

D'après $i = C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$: $[I] = [C]\,\dfrac{[U]}{[T]}$, donc $[C] = \dfrac{[I]\,[T]}{[U]}$.

$$[\tau] = [r]\,[C] = \frac{[U]}{[I]} \times \frac{[I]\,[T]}{[U]} = [T]$$

$[\tau] = [T]$: $\tau = rC$ est homogène à un temps.

COMPRENDRE

Avec les unités, cela revient à dire qu'un ohm multiplié par un farad donne une seconde : $\Omega \cdot \mathrm{F} = \dfrac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}} \times \dfrac{\mathrm{A}\cdot\mathrm{s}}{\mathrm{V}} = \mathrm{s}$.

1.3 Vérifier que l'expression $u_C(t) = U\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$ est solution de l'équation différentielle (1).

On dérive : $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{U}{\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$.

On reporte dans le premier membre de (1) :

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u_C = -\frac{U}{\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{U}{\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau} = 0$$

L'égalité est vraie à toute date t : $u_C(t) = U\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$ est solution de (1).

COMPRENDRE

Cette expression respecte aussi la condition initiale : $u_C(0) = U\,\mathrm{e}^{0} = U$, tension du condensateur chargé à la fermeture de K.

2.1 Retrouver l'expression $i(t) = -I\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$ à partir de celle de $u_C(t)$ et exprimer I en fonction de U et r.

$$i = C\,\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = C \times \left(-\frac{U}{\tau}\right)\mathrm{e}^{-t/\tau}.$$

Comme $\tau = rC$: $\dfrac{C}{\tau} = \dfrac{1}{r}$, d'où $i(t) = -\dfrac{U}{r}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$.

$i(t) = -I\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$ avec $I = \dfrac{U}{r}$, constante positive.

COMPRENDRE

Autre chemin, plus court : $u_r = -u_C$ donc $i = \dfrac{u_r}{r} = -\dfrac{u_C}{r}$. Le signe « $-$ » indique que le courant réel circule dans le sens opposé à la flèche i du schéma.

2.2 Choisir, parmi les courbes A et B de l'annexe, celle qui représente l'intensité du courant pendant la décharge. Justifier.

D'après 2.1, $i(t) = -I\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$ avec $I > 0$: l'intensité est négative à toute date.

À $t = 0$: $i(0) = -I$. Quand t devient grand, $\mathrm{e}^{-t/\tau}$ tend vers 0 : i tend vers 0 par valeurs négatives.

C'est la **courbe A** : i part de -30 kA et augmente vers 0 en restant négative.

PIÈGE
Choisir la courbe B parce que le texte annonce « 30 kiloampères ». Le texte donne la valeur absolue ; le signe vient de l'orientation choisie sur le schéma.

2.3 Déterminer la valeur de τ par une méthode au choix, puis en déduire la durée approximative de la décharge parmi : a) 30 µs ; b) 150 µs ; c) 6 µs.

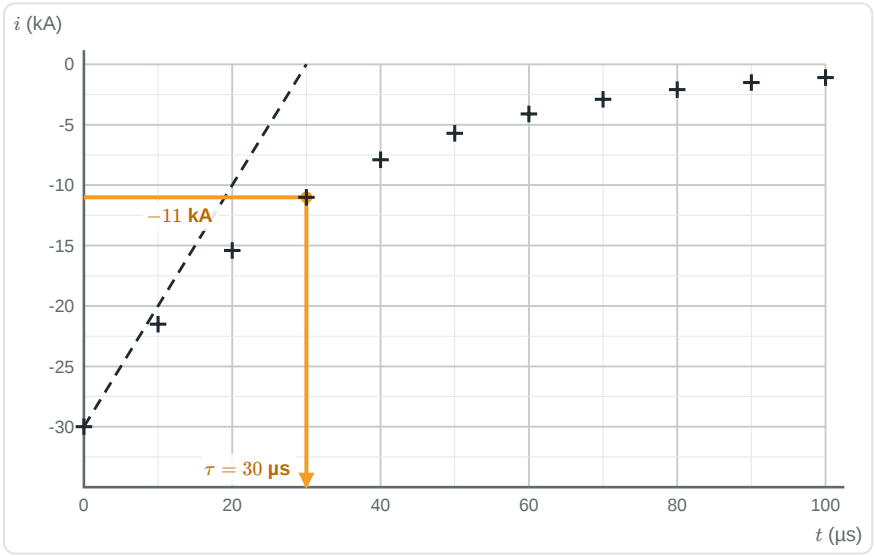
Données utiles courbe A : $i(0) = -I = -30$ kA ; décharge quasi terminée au bout de 5τ

À la date $t = \tau$: $i(\tau) = -I\,\mathrm{e}^{-1} = -0{,}37 \times I = -0{,}37 \times 30 = -11$ kA.

Sur la courbe A, le point d'ordonnée -11 kA a pour abscisse $t = 30$ µs, donc $\tau = 30$ µs.

Durée de la décharge : $\Delta t \approx 5\tau = 5 \times 30 = 150$ µs.

$\tau = 30$ µs ; la décharge dure environ 150 µs : réponse **b**.

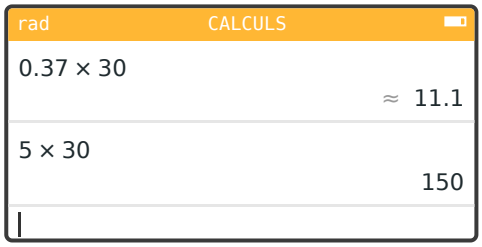


2.3 · Courbe A de l'annexe : lecture de τ à 37 % de la valeur initiale, et tangente à l'origine

PIÈGE
Répondre 30 µs (réponse a) : c'est τ, pas la durée de la décharge. À $t = \tau$, l'intensité vaut encore 37 % de sa valeur initiale.

MÉTHODE
Autre méthode : la tangente à l'origine (en tirets) coupe l'asymptote $i = 0$ à la date $t = \tau$. Avec des points isolés, la lecture à 37 % de la valeur initiale est plus sûre.

À LA CALCULATRICE



2.4 Donner l'expression littérale de la capacité C du condensateur géant en fonction de U et $E_{\text{él}}$, puis calculer sa valeur approchée en nanofarads.

Données utiles $E_{\text{él}} = 5{,}0 \times 10^{7}$ J ; U de l'ordre de 100 millions de volts, soit $U = 1{,}0 \times 10^{8}$ V

Avant la décharge, le condensateur chargé sous la tension U stocke l'énergie $E_{\text{él}} = \dfrac{1}{2} C U^2$, entièrement mise en jeu lors de la décharge.

Donc :

$$C = \frac{2\,E_{\text{él}}}{U^2} = \frac{2 \times 5{,}0 \times 10^{7}}{(1{,}0 \times 10^{8})^2} = 1{,}0 \times 10^{-8}\ \text{F}$$

$$C = \frac{2\,E_{\text{él}}}{U^2} \approx 10\ \text{nF}$$

PIÈGE
Oublier le carré sur U, ou mal convertir : $1\ \text{nF} = 10^{-9}$ F, donc $1{,}0 \times 10^{-8}$ F $= 10$ nF.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs au plus, comme $E_{\text{él}}$; U n'est qu'un ordre de grandeur. Contrôle : $r = \dfrac{U}{I} \approx 3{,}3\ \text{k}\Omega$ donne $rC \approx 33$ µs, cohérent avec le τ lu en 2.3.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$$\frac{2 \times 5.0 \times 10^{7}}{(1.0 \times 10^{8})^{2}} \approx 1 \times 10^{-8}$$

3.1 Donner la définition d'une onde mécanique progressive.

Une onde mécanique progressive est le phénomène de propagation d'une perturbation dans un milieu matériel, de proche en proche, avec transport d'énergie mais sans transport de matière.

PIÈGE
Oublier « milieu matériel » ou « sans transport de matière » : ce sont les deux éléments attendus dans la définition.

3.2 Le tonnerre est-il une onde longitudinale ou une onde transversale ? Justifier.

Le tonnerre est une onde sonore : une succession de compressions et de dilatations des couches d'air. Ces déformations se font dans la direction même de la propagation de l'onde.

Le tonnerre est une onde **longitudinale**.

COMPRENDRE
Une onde est transversale quand la perturbation est perpendiculaire à la direction de propagation, comme sur une corde secouée ou à la surface de l'eau.

3.3 Quelles sont les longueurs d'onde correspondant aux fréquences limites du domaine audible ?

Données utiles $f_1 = 20$ Hz ; $f_2 = 20$ kHz ; $v_{\text{son}} = 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Longueur d'onde : $\lambda = \dfrac{v_{\text{son}}}{f}$, avec f en hertz.

$$\lambda_1 = \frac{340}{20} = 17 \text{ m} \qquad \lambda_2 = \frac{340}{20 \times 10^{3}} = 1{,}7 \times 10^{-2} \text{ m}$$

Les sons audibles ont une longueur d'onde comprise entre $1{,}7$ cm (20 kHz) et 17 m (20 Hz).

PIÈGE
Laisser 20 kHz en kilohertz : on trouverait 17 m dans les deux cas. Plus la fréquence est élevée, plus la longueur d'onde est courte.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$$\frac{340}{20} \approx 17$$

$$\frac{340}{20 \times 10^{3}} \approx 0.017$$

4.1 Montrer que la durée entre l'éclair et le tonnerre s'écrit $\Delta t = d\left(\frac{1}{v_{\text{son}}} - \frac{1}{c}\right)$.

L'éclair et le tonnerre sont émis au même instant, à la distance d de l'observateur.

Durée du trajet de la lumière : $t_{\text{lum}} = \frac{d}{c}$. Durée du trajet du son : $t_{\text{son}} = \frac{d}{v_{\text{son}}}$.

Le son arrive après la lumière : $\Delta t = t_{\text{son}} - t_{\text{lum}} = \frac{d}{v_{\text{son}}} - \frac{d}{c}$.

$$\Delta t = d\left(\frac{1}{v_{\text{son}}} - \frac{1}{c}\right)$$

MÉTHODE

Deux signaux partis ensemble, à des célérités différentes : on écrit la durée de trajet de chacun, puis on soustrait la plus courte à la plus longue.

4.2 Justifier le calcul proposé dans l'encadré (compter les secondes puis diviser par trois) pour obtenir la distance de l'orage en kilomètres.

Données utiles $v_{\text{son}} = 340\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $c = 3\times10^{8}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

c est environ un million de fois plus grande que v_{son} : $\frac{1}{c}$ est négligeable devant $\frac{1}{v_{\text{son}}}$.

Alors $\Delta t \approx \frac{d}{v_{\text{son}}}$, soit $d \approx v_{\text{son}} \times \Delta t$.

Avec $v_{\text{son}} = 0{,}340\ \text{km}\cdot\text{s}^{-1}$, d en km et Δt en s : $d \approx 0{,}340 \times \Delta t$. Or $0{,}340 \approx \frac{1}{3}$.

Pour $\Delta t = 6$ s : $d \approx 6 \times 0{,}340 = 2{,}0$ km, comme annoncé.

$$d\,(\text{km}) \approx \frac{\Delta t\,(\text{s})}{3}$$: la règle de l'encadré est justifiée.

COMPRENDRE

La règle revient à considérer que l'éclair est vu instantanément et que le son parcourt un kilomètre en trois secondes environ ($1 \div 0{,}340 = 2{,}9$ s).

À LA CALCULATRICE

