Corrigé complet — Bac S 2008 Liban (ancien programme)

Physique-chimie, enseignement de spécialité **20 points** **3 h 30**

Ex 1	**Détermination expérimentale du pKa d'un indicateur coloré: le bleu de bromophénol** Couple acide-base · Tableau d'avancement · Taux d'avancement final · Absorbance et concentration · Diagramme de prédominance · pKa d'un indicateur coloré	6,5 pts	1 h 18	19 questions	p. 2
Ex 2	**1932: Le radium à la mode...** Composition d'un noyau · Désintégration alpha et lois de conservation · Loi de décroissance radioactive · Temps de demi-vie · Constante de temps et tangente à l'origine	4 pts	52 min	9 questions	p. 8
Ex 3	**Spécialité : étude d'un piano** Corde vibrante et mode fondamental · Nœuds et ventres de vibration · Harmoniques · Hauteur et timbre d'un son · Célérité sur une corde tendue · Masse linéique	4 pts	52 min	10 questions	p. 12
Ex 4	**Découverte d'une exo-planète habitable** Force et champ de gravitation · Deuxième loi de Newton · Mouvement circulaire uniforme · Troisième loi de Kepler · Niveaux d'énergie quantifiés · Énergie d'un photon	5,5 pts	1 h 05	16 questions	p. 15

Comment s'en servir. Fais d'abord le sujet en temps limité, puis corrige-toi exercice par exercice. À gauche de chaque question, sur les carreaux : ce qu'il faut écrire sur ta copie. À droite : les pièges, ce qu'il faut comprendre et les méthodes.

Détermination expérimentale du pKa d'un indicateur coloré: le bleu de bromophénol

Bac S 2008 Liban (ancien programme) · Exercice 1 **6,5 points** **Durée conseillée 1 h 18**

1 (Première partie) Calculer la quantité de matière n_0 de bleu de bromophénol initialement introduite dans 100 mL de solution S_0.

Données utiles $C_0 = 3{,}0 \times 10^{-5}\ \text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$; $V = 100\ \text{mL} = 0{,}100\ \text{L}$

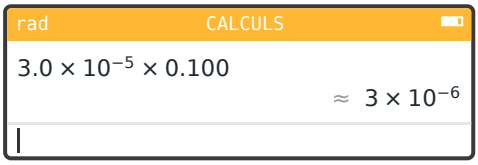
$n_0 = C_0 \times V = 3{,}0 \times 10^{-5} \times 0{,}100$

$n_0 = 3{,}0 \times 10^{-6}\ \text{mol}$

PIÈGE
Laisser le volume en millilitres : la concentration est en $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$, il faut V en litres.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme C_0, la donnée la moins précise. La même règle vaut pour tous les calculs de l'exercice.

À LA CALCULATRICE



2.1 (Première partie) Donner la définition d'un acide selon Brønsted.

Un acide, au sens de Brønsted, est une espèce chimique susceptible de céder un ion hydrogène H^+ (un proton).

2.2 (Première partie) Donner les couples acide-base intervenant dans l'équation $\text{HIn}\,(\text{aq}) + \text{H}_2\text{O}\,(\text{l}) = \text{In}^-\,(\text{aq}) + \text{H}_3\text{O}^+\,(\text{aq})$.

HIn cède un ion H^+ et devient In^- ; H_2O le capte et devient H_3O^+.

Couples (acide / base) : $\text{HIn}\,(\text{aq})$ / $\text{In}^-\,(\text{aq})$ et $\text{H}_3\text{O}^+\,(\text{aq})$ / $\text{H}_2\text{O}\,(\text{l})$

PIÈGE
Écrire H_2O / H_3O^+ : l'acide s'écrit toujours à gauche. Ici l'eau joue le rôle de base, son acide conjugué est H_3O^+.

3.1 (Première partie) Remplir le tableau d'avancement de la réaction (annexe) en fonction de n_0, x, x_{max}, x_f.

Initialement, seul HIn est apporté, en quantité n_0 ; l'eau est le solvant, en excès. Les nombres stœchiométriques valent tous 1 : pour un avancement x, il disparaît x mol de HIn et il se forme x mol de In^- et x mol de H_3O^+.

Tableau complété en annexe : $n_0 - x$ pour HIn, x pour In^- et pour H_3O^+, avec $x = x_{max}$ puis $x = x_f$ dans les deux dernières lignes.

Équation		HIn(aq)	+ $H_2O(\ell)$ =	$In^-(aq)$	+ $H_3O^+(aq)$
	Avancement	Quantités de matière (mol)			
État initial	x = 0	n_0	Excès	0	0
État intermédiaire	x	$n_0 - x$	Excès	x	x
État final si réaction totale	$x = x_{max}$	$n_0 - x_{max} = 0$	Excès	x_{max}	x_{max}
État final observé	$x = x_f$	$n_0 - x_f$	Excès	x_f	x_f

3.1 · Annexe complétée : tableau d'avancement (ajouts en orange)

3.2 (Première partie) Calculer l'avancement maximal x_{max}.

Données utiles $n_0 = 3{,}0 \times 10^{-6}$ mol (question 1)

L'eau étant en excès, le réactif limitant est HIn. Si la réaction était totale, il serait entièrement consommé : $n_0 - x_{max} = 0$.

$$x_{max} = n_0 = 3{,}0 \times 10^{-6} \text{ mol}$$

3.3 (Première partie) Calculer l'avancement final x_f de la réaction.

Données utiles pH $= 4{,}7$; $V = 0{,}100$ L

À l'état final, le tableau donne $n(\mathrm{H_3O^+}) = x_f$, donc $[\mathrm{H_3O^+}]_f = \dfrac{x_f}{V}$.

Or $[\mathrm{H_3O^+}]_f = 10^{-\mathrm{pH}}$ (en $\mathrm{mol \cdot L^{-1}}$), d'où :

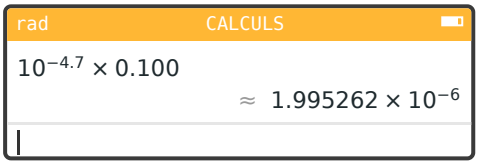
$$x_f = 10^{-\mathrm{pH}} \times V = 10^{-4{,}7} \times 0{,}100$$

$$x_f = 2{,}0 \times 10^{-6} \text{ mol}$$

MÉTHODE

Dès qu'un pH est mesuré, il donne $[\mathrm{H_3O^+}]$ à l'état final, donc x_f par le tableau d'avancement. On néglige les ions $\mathrm{H_3O^+}$ venant de l'autoprotolyse de l'eau.

À LA CALCULATRICE



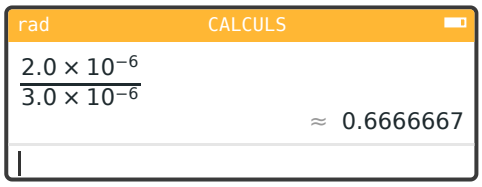
3.4 (Première partie) En déduire le taux d'avancement final. Cette réaction est-elle totale ?

Données utiles $x_f = 2{,}0 \times 10^{-6}$ mol (3.3) ; $x_{max} = 3{,}0 \times 10^{-6}$ mol (3.2)

$$\tau = \frac{x_f}{x_{max}} = \frac{2{,}0 \times 10^{-6}}{3{,}0 \times 10^{-6}} = 0{,}67, \text{ soit 67 \%.}$$

$\tau = 0{,}67 < 1$: la réaction n'est pas totale, elle est limitée (HIn est un acide faible).

À LA CALCULATRICE



4.1 (Première partie) À l'aide de la ligne « état intermédiaire » du tableau, justifier que pour tout avancement x on a $n_{\mathrm{HIn}} + n_{\mathrm{In^-}} = n_0$.

Pour un avancement x quelconque : $n_{\mathrm{HIn}} = n_0 - x$ et $n_{\mathrm{In^-}} = x$.

$$n_{\mathrm{HIn}} + n_{\mathrm{In^-}} = (n_0 - x) + x = n_0$$

COMPRENDRE

Chaque molécule HIn qui disparaît donne un ion $\mathrm{In^-}$: l'indicateur change de forme, mais sa quantité totale se conserve.

4.2 (Première partie) En déduire la relation qui relie les concentrations molaires effectives des espèces présentes en solution et la concentration C_0.

On divise la relation précédente par le volume V de la solution :

$$\frac{n_{\mathrm{HIn}}}{V} + \frac{n_{\mathrm{In^-}}}{V} = \frac{n_0}{V}$$

$$[\mathrm{HIn}] + [\mathrm{In^-}] = C_0$$

1 (Deuxième partie) Quelle espèce chimique du couple de l'indicateur coloré prédomine dans la solution S_1 ? dans la solution S_2 ?

La teinte de la solution est celle de la forme la plus abondante. S_1 est jaune, couleur de la forme acide ; S_2 est bleue, couleur de la forme basique.

Dans S_1 : HIn prédomine. Dans S_2 : $\mathrm{In^-}$ prédomine.

2 (Deuxième partie) De quel paramètre dépend la proportion d'acide et de base conjuguée dans chaque solution ?

Les deux solutions contiennent la même concentration apportée C_0 d'indicateur ; seul leur pH diffère (2,0 et 12,0).

La proportion des deux formes dépend du pH de la solution.

3 (Deuxième partie) Pour S_2, on suppose que la concentration effective de la forme acide HIn est négligeable. Quelle est alors la concentration effective de la forme basique $\mathrm{In^-}$?

Données utiles $[\mathrm{HIn}] + [\mathrm{In^-}] = C_0$; $C_0 = 3{,}0 \times 10^{-5}\ \mathrm{mol \cdot L^{-1}}$

Si $[\mathrm{HIn}] \ll [\mathrm{In^-}]$, la relation $[\mathrm{HIn}] + [\mathrm{In^-}] = C_0$ se réduit à $[\mathrm{In^-}] \approx C_0$.

$[\mathrm{In^-}] = C_0 = 3{,}0 \times 10^{-5}\ \mathrm{mol \cdot L^{-1}}$

1.1 (Troisième partie) Montrer que l'absorbance A d'un mélange quelconque est donnée par $A = k \cdot [\mathrm{In^-}]$.

L'absorbance vérifie $A = k \cdot [\mathrm{X}]$, où X est l'espèce qui absorbe. À la longueur d'onde λ choisie, $\mathrm{In^-}$ est la seule espèce absorbante du mélange (HIn n'absorbe pas).

$A = k \cdot [\mathrm{In^-}]$

COMPRENDRE
La relation $A = k \cdot [\mathrm{X}]$ est la loi de Beer-Lambert, avec $k = \varepsilon \cdot \ell$. On règle λ sur une radiation absorbée par la forme bleue seulement, dans le jaune-orangé.

1.2 (Troisième partie) Pour S_2 (pH $= 12{,}0$), l'absorbance est maximale. Montrer que $A_{max} = k \cdot C_0$. En déduire la valeur du coefficient k et préciser son unité.

Données utiles $A_{max} = 1{,}66$ (tableau, pH $= 12$) ; $C_0 = 3{,}0 \times 10^{-5}\ \mathrm{mol \cdot L^{-1}}$

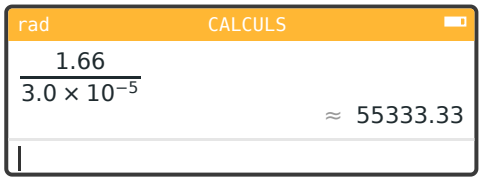
Dans S_2, la forme acide est négligeable : $[\mathrm{In^-}] = C_0$ (deuxième partie, question 3). La relation $A = k \cdot [\mathrm{In^-}]$ devient donc $A_{max} = k \cdot C_0$.

$$k = \frac{A_{max}}{C_0} = \frac{1{,}66}{3{,}0 \times 10^{-5}}$$

L'absorbance n'a pas d'unité : k est l'inverse d'une concentration.

$k = 5{,}5 \times 10^{4}\ \mathrm{L \cdot mol^{-1}}$

À LA CALCULATRICE



1.3 (Troisième partie) Calculer les concentrations effectives des espèces $\mathrm{In^-}$ et HIn dans le mélange lorsque son absorbance vaut $A = 0{,}83$.

Données utiles $A_{max} = 1{,}66$; $C_0 = 3{,}0 \times 10^{-5}\ \mathrm{mol \cdot L^{-1}}$; $k = \dfrac{A_{max}}{C_0}$ (1.2)

$A = k \cdot [\mathrm{In^-}]$ avec $k = \dfrac{A_{max}}{C_0}$, donc :

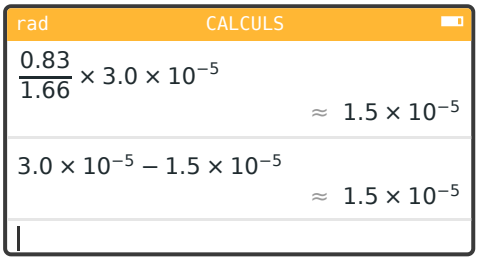
$$[\mathrm{In^-}] = \frac{A}{k} = \frac{A}{A_{max}} \times C_0 = \frac{0{,}83}{1{,}66} \times 3{,}0 \times 10^{-5} = 1{,}5 \times 10^{-5}\ \mathrm{mol \cdot L^{-1}}$$

Conservation de la matière : $[\mathrm{HIn}] = C_0 - [\mathrm{In^-}] = 3{,}0 \times 10^{-5} - 1{,}5 \times 10^{-5} = 1{,}5 \times 10^{-5}\ \mathrm{mol \cdot L^{-1}}$

$$\boxed{[\mathrm{In^-}] = [\mathrm{HIn}] = 1{,}5 \times 10^{-5}\ \mathrm{mol \cdot L^{-1}}}$$

MÉTHODE
Garder k sous la forme littérale A_{max}/C_0 évite de réutiliser une valeur arrondie. Ici $A = A_{max}/2$: la moitié de l'indicateur est sous forme basique.

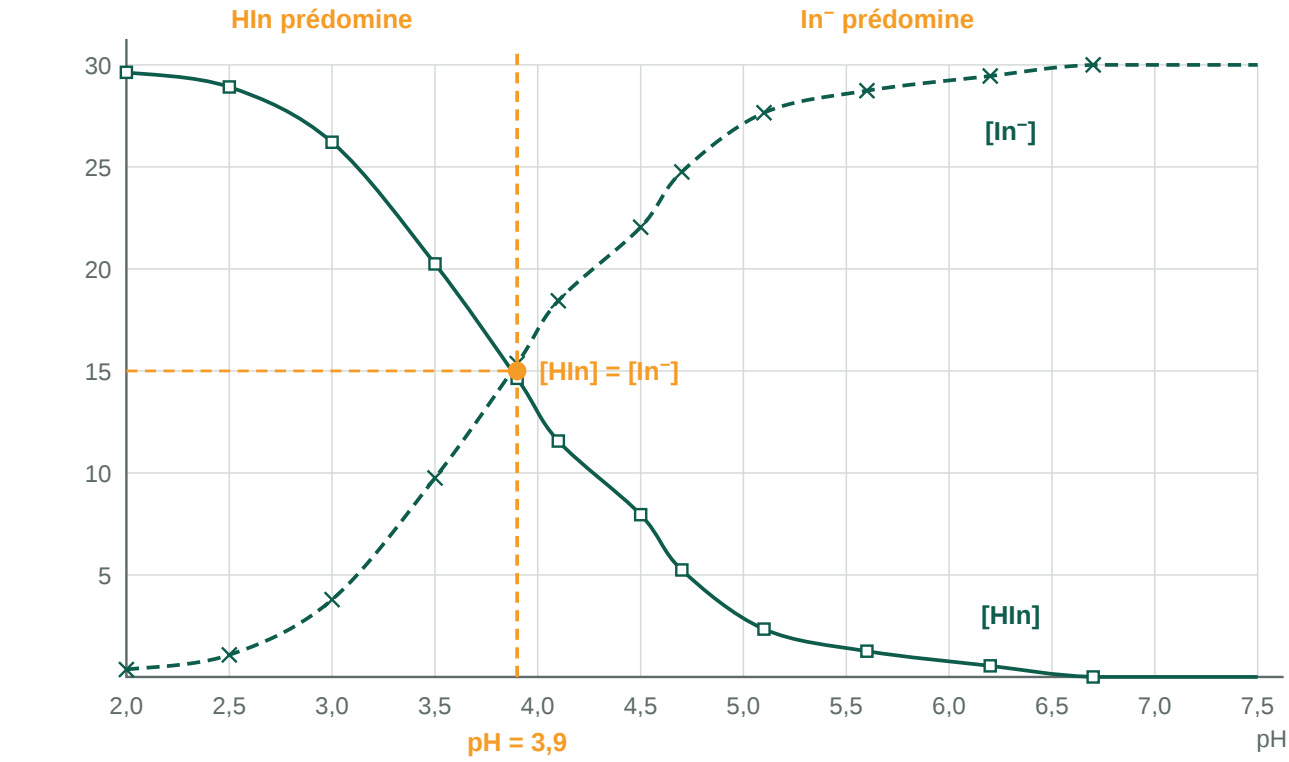
À LA CALCULATRICE



2.1 (Troisième partie) Déterminer à partir du graphique de l'annexe les domaines de prédominance des formes acide et basique du bleu de bromophénol.

Une forme prédomine quand sa concentration est supérieure à celle de l'autre. Les deux courbes se coupent à pH $= 3{,}9$: à gauche de ce point la courbe de HIn est au-dessus, à droite c'est celle de $\mathrm{In^-}$.

HIn prédomine pour pH $< 3{,}9$; $\mathrm{In^-}$ prédomine pour pH $> 3{,}9$.



2.1 · Annexe : concentrations de HIn et de In^- en fonction du pH, avec le point d'intersection et les domaines de prédominance (en orange)

2.2 (Troisième partie) Donner la relation entre pH, pK_a, $[HIn]$ et $[In^-]$.

$$pH = pK_a + \log \frac{[In^-]}{[HIn]}$$

PIÈGE
Inverser le quotient : c'est la base au numérateur, l'acide au dénominateur. Contrôle rapide : plus le pH est élevé, plus la base est abondante.

2.3 (Troisième partie) En déduire qu'un point particulier de ce graphique permet de déterminer le pK_a du couple étudié. Donner sa valeur.

Au point d'intersection des deux courbes, $[HIn] = [In^-]$, donc $\log \frac{[In^-]}{[HIn]} = \log 1 = 0$ et $pH = pK_a$.

L'abscisse de ce point se lit sur le graphique : $pH = 3{,}9$.

$$pK_a = 3{,}9$$

COMPRENDRE
L'ordonnée du point d'intersection vaut $C_0/2 = 1{,}5 \times 10^{-5}\ mol \cdot L^{-1}$: c'est le mélange d'absorbance 0,83 de la question 1.3.

2.4 (Troisième partie) Vérifier par un calcul que l'hypothèse émise dans la question 3 de la deuxième partie est légitime.

Données utiles S_2 : pH $= 12{,}0$; $\mathrm{p}K_a = 3{,}9$ (2.3)

Hypothèse à vérifier : dans S_2, $[\mathrm{HIn}]$ est négligeable devant $[\mathrm{In}^-]$.

De $\mathrm{pH} = \mathrm{p}K_a + \log \dfrac{[\mathrm{In}^-]}{[\mathrm{HIn}]}$ on tire :

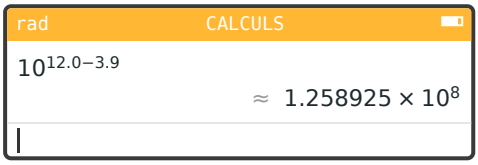
$$\frac{[\mathrm{In}^-]}{[\mathrm{HIn}]} = 10^{\,\mathrm{pH}-\mathrm{p}K_a} = 10^{\,12{,}0-3{,}9} = 10^{8{,}1} \approx 1{,}3 \times 10^8$$

$[\mathrm{In}^-] \approx 1{,}3 \times 10^8 \times [\mathrm{HIn}]$: la forme acide est bien négligeable dans S_2, l'hypothèse est légitime.

COMPRENDRE

Dès que pH $> \mathrm{p}K_a + 2$, la base est plus de 100 fois plus concentrée que l'acide. Ici l'écart atteint 8,1 unités de pH.

À LA CALCULATRICE



1932: Le radium à la mode...

Bac S 2008 Liban (ancien programme) · Exercice 2 **4 points** **Durée conseillée 52 min**

1.1 Donner la composition d'un noyau de radium 226, de symbole $^{226}_{88}\mathrm{Ra}$.

Le numéro atomique est $Z = 88$: le noyau contient 88 protons.

Le nombre de nucléons est $A = 226$: il contient $A - Z = 226 - 88 = 138$ neutrons.

Noyau de radium 226 : **88 protons et 138 neutrons**.

PIÈGE
Prendre 226 pour le nombre de neutrons : c'est le nombre total de nucléons. Ne pas citer d'électrons non plus, la question porte sur le noyau seul.

1.2 Le radium 226 est radioactif α et conduit au radon Rn. Écrire l'équation de la désintégration et préciser les lois de conservation utilisées.

Une désintégration α émet un noyau d'hélium 4 : $^{226}_{88}\mathrm{Ra} \longrightarrow {}^{A}_{Z}\mathrm{Rn} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$

Conservation du nombre de nucléons : $226 = A + 4$, donc $A = 222$.

Conservation du nombre de charge : $88 = Z + 2$, donc $Z = 86$.

$$^{226}_{88}\mathrm{Ra} \longrightarrow {}^{222}_{86}\mathrm{Rn} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$$

COMPRENDRE
Ces deux règles sont les lois de Soddy. Le noyau fils obtenu est le radon 222, celui dont l'activité est étudiée dans la deuxième partie.

2.1 Calculer la masse de radium 226 contenue initialement dans 100 g de crème. Citer la phrase du texte d'introduction illustrant ce résultat.

Données utiles $N_0 = 3{,}33 \times 10^{14}$ noyaux ; $N_A = 6{,}02 \times 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$; $M = 226\ \mathrm{g \cdot mol^{-1}}$

La quantité de matière de radium est $n = \dfrac{N_0}{N_A}$ et la masse vaut $m = n\,M$, d'où :

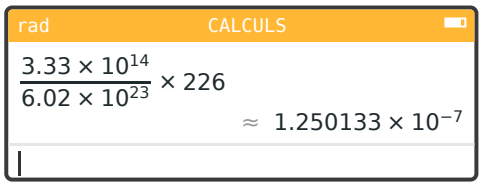
$$m = \frac{N_0}{N_A}\,M = \frac{3{,}33 \times 10^{14}}{6{,}02 \times 10^{23}} \times 226 = 1{,}25 \times 10^{-7}\ \mathrm{g}$$

Cette masse est infime devant les 100 g de crème. Phrase du texte : « Le Tho-Radia revendique haut et fort sa faible teneur en radium ».

$m = 1{,}25 \times 10^{-7}$ g, soit environ $0{,}1\ \mu$g de radium dans 100 g de crème.

COMPRENDRE
Les trois données ont trois chiffres significatifs : le résultat en garde trois. La masse d'un atome est assimilée à celle de son noyau, les électrons étant environ 2000 fois plus légers qu'un nucléon.

À LA CALCULATRICE



2.2.1 Donner l'expression de la loi de décroissance du nombre N de noyaux de radium 226 en fonction du temps.

$N(t) = N_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$, avec N_0 le nombre de noyaux à $t = 0$ et λ la constante radioactive.

PIÈGE
Oublier le signe « $-$ » dans l'exposant, ou ne pas dire ce que représentent N_0 et λ. Le produit λt est sans unité : t en secondes si λ est en $\mathrm{s^{-1}}$.

2.2.2 Calculer le pourcentage de noyaux restants à la date $t = 10$ ans. Pourquoi l'activité due au radium 226 ne varie-t-elle pratiquement pas pendant dix ans ?

Données utiles $\lambda = 1{,}35 \times 10^{-11}\ \text{s}^{-1}$; 1 an $= 365{,}25$ jours

D'après la loi de décroissance : $\dfrac{N}{N_0} = \text{e}^{-\lambda t}$.

Durée en secondes : $t = 10 \times 365{,}25 \times 24 \times 3600 = 3{,}16 \times 10^8$ s.

$$\frac{N}{N_0} = \text{e}^{-1{,}35\times10^{-11}\times3{,}16\times10^{8}} = 0{,}996$$

L'activité est proportionnelle au nombre de noyaux présents : $A = \lambda N$. En dix ans, elle ne perd donc que $0{,}4\ \%$ de sa valeur : elle reste pratiquement constante.

Il reste $99{,}6\ \%$ des noyaux de radium au bout de 10 ans.

PIÈGE
Laisser t en années dans l'exponentielle alors que λ est en s^{-1} : on trouverait $100\ \%$ sans rien avoir montré.

COMPRENDRE
Arrondir à deux chiffres donnerait $1{,}0 \times 10^2\ \%$ et masquerait la légère baisse : on garde $99{,}6\ \%$, précision permise par λ.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$10 \times 365.25 \times 24 \times 3600 \approx 3.15576 \times 10^8$

$100 \times e^{(-1.35\times10^{-11})\times10\times365.25\times24\times3600} \approx 99.57488$

2.3 Justifier la phrase du texte : « On a calculé qu'elle n'aurait diminué que de moitié au bout de seize siècles. »

Données utiles $\lambda = 1{,}35 \times 10^{-11}\ \text{s}^{-1}$

L'activité est divisée par deux au bout d'une durée égale au temps de demi-vie $t_{1/2}$:

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{\ln 2}{1{,}35 \times 10^{-11}} = 5{,}13 \times 10^{10}\ \text{s}$$

En années : $t_{1/2} = \dfrac{5{,}13 \times 10^{10}}{365{,}25 \times 24 \times 3600} = 1{,}63 \times 10^3$ ans.

$t_{1/2} = 1{,}63 \times 10^3$ ans, soit environ 16 siècles : la phrase du texte est justifiée.

MÉTHODE
Autre voie : calculer $\text{e}^{-\lambda t}$ pour $t = 1600$ ans. On trouve $0{,}51$, soit environ la moitié des noyaux, donc la moitié de l'activité.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\dfrac{\ln(2)}{1.35 \times 10^{-11}} \approx 5.134424 \times 10^{10}$

$\dfrac{\frac{\ln(2)}{1.35 \times 10^{-11}}}{365.25 \times 24 \times 3600} \approx 1627.001$

1 Déterminer graphiquement la constante de temps τ du radon 222. Préciser la méthode utilisée.

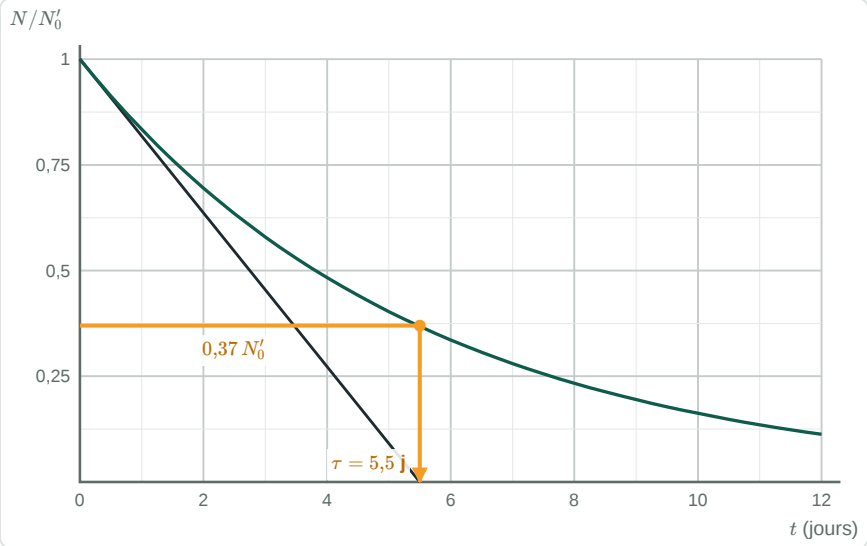
La droite déjà tracée sur l'annexe est la tangente à la courbe à la date $t = 0$. Elle coupe l'axe des abscisses à la date $t = \tau$.

Lecture sur l'annexe : la tangente atteint l'axe des dates entre 5 et 6 jours.

$\tau \approx 5{,}5$ jours

PIÈGE
Donner une valeur sans nommer la méthode : la question la demande explicitement.

MÉTHODE
Vérification sans tangente : à $t = \tau$, il reste $N'_0\,\mathrm{e}^{-1} = 0{,}37\,N'_0$. On repère cette ordonnée sur la courbe et on lit l'abscisse correspondante.



1 · Annexe : la tangente à l'origine coupe l'axe des dates en $t = \tau$; vérification par $N(\tau) = 0{,}37\,N'_0$

2 Rappeler la définition du temps de demi-vie. Établir son expression en fonction de τ, puis le calculer. La valeur est-elle en accord avec la valeur donnée ?

Données utiles $\tau = 5{,}5$ jours (Q1) ; valeur donnée : $t_{1/2} = 3{,}8$ jours

Le temps de demi-vie $t_{1/2}$ est la durée au bout de laquelle la moitié des noyaux radioactifs initialement présents s'est désintégrée.

Avec $\tau = \dfrac{1}{\lambda}$, la loi de décroissance s'écrit $N(t) = N'_0\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$.

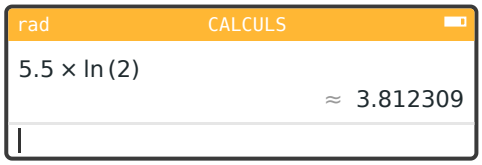
À $t = t_{1/2}$: $N = \dfrac{N'_0}{2}$, donc $\mathrm{e}^{-t_{1/2}/\tau} = \dfrac{1}{2}$, soit $-\dfrac{t_{1/2}}{\tau} = \ln\dfrac{1}{2} = -\ln 2$.

$$t_{1/2} = \tau\,\ln 2 = 5{,}5 \times \ln 2 = 3{,}8 \text{ jours}$$

$t_{1/2} = \tau \ln 2 = 3{,}8$ jours : valeur en accord avec celle de l'énoncé (3,8 jours).

COMPRENDRE
τ est lue avec deux chiffres significatifs, le résultat en garde deux. On peut laisser τ en jours : $\ln 2$ est sans unité, $t_{1/2}$ sort en jours.

À LA CALCULATRICE



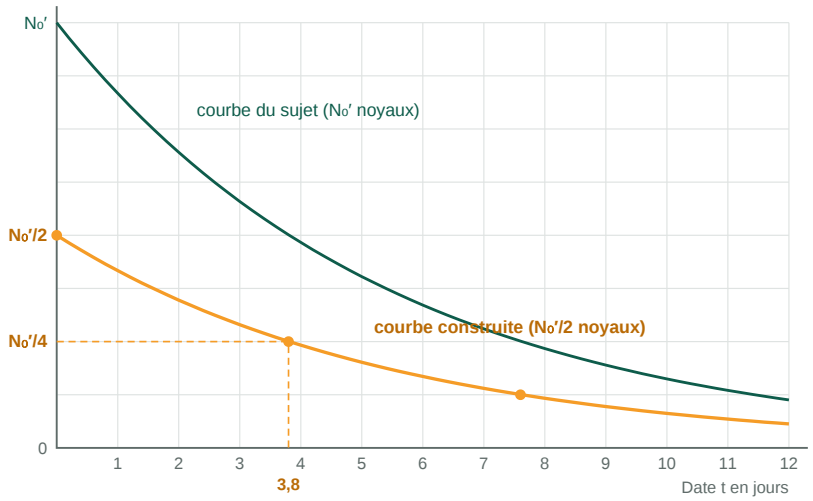
3 Construire sur le même graphique, avec les mêmes échelles, la courbe de décroissance du radon 222 pour un nombre initial de noyaux deux fois plus faible.

Le nombre initial devient $\frac{N'_0}{2}$; τ et $t_{1/2}$ ne dépendent que du noyau, ils sont inchangés : $N(t) = \frac{N'_0}{2}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$.

À chaque date, l'ordonnée est la moitié de celle de la courbe du sujet.

Points utiles : $\frac{N'_0}{2}$ à $t = 0$, $\frac{N'_0}{4}$ à $t = 3{,}8$ jours, $\frac{N'_0}{8}$ à $t = 7{,}6$ jours.

Courbe orange de l'annexe : départ à $\frac{N'_0}{2}$, même demi-vie de 3,8 jours.



3 · Annexe complétée : même allure, ordonnées divisées par deux à chaque date

PIÈGE
Tracer une courbe qui décroît deux fois plus vite. Le temps de demi-vie ne dépend pas du nombre initial de noyaux.

MÉTHODE
Pour construire la courbe, diviser par deux l'ordonnée de plusieurs points de la courbe initiale, puis les relier à main levée.

Spécialité : étude d'un piano

Bac S 2008 Liban (ancien programme) · Exercice 3 **4 points** **Durée conseillée 52 min**

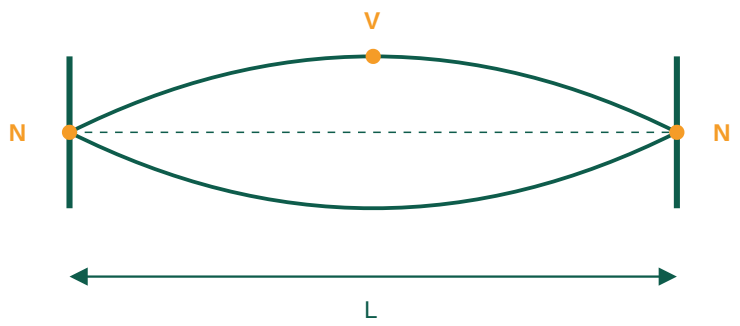
1 Schématiser une corde de longueur L, fixée à ses deux extrémités, vibrant dans le mode fondamental ; placer les nœuds et les ventres de vibration.

Dans le mode fondamental, la corde forme un seul fuseau.

Les deux extrémités, fixes, sont des nœuds de vibration (N) ; le milieu de la corde, où l'amplitude est maximale, est un ventre de vibration (V).

Un seul fuseau : deux nœuds aux extrémités, un ventre au milieu (voir schéma).

PIÈGE
Dessiner une sinusoïde complète : cela correspond au mode 2 (deux fuseaux). Le fondamental n'a qu'un fuseau, avec ses deux positions extrêmes tracées de part et d'autre de la position de repos.



1 · Corde vibrant dans le mode fondamental : un seul fuseau

2 Donner la relation entre L et la longueur d'onde λ pour le mode fondamental, puis en déduire l'expression de la fréquence fondamentale f_1 en fonction de la célérité et de L.

Un fuseau a pour longueur une demi-longueur d'onde. Le fondamental ne comporte qu'un fuseau, donc :

$$L = \frac{\lambda}{2} \quad \text{soit} \quad \lambda = 2L$$

Or la longueur d'onde, la célérité et la fréquence sont liées par $\lambda = \frac{V}{f_1}$, d'où $2L = \frac{V}{f_1}$.

$L = \frac{\lambda}{2}$ et $f_1 = \frac{V}{2L}$

MÉTHODE
Pour le mode de rang n, la corde contient n fuseaux : $L = n\,\frac{\lambda}{2}$, d'où $f_n = n\,\frac{V}{2L} = n\,f_1$. Cette relation resservira à la question 3.3.1.

3.1 À quelle caractéristique d'un son est associée la fréquence d'une note ?

La fréquence d'une note est associée à la **hauteur** du son : plus la fréquence est élevée, plus le son est aigu.

COMPRENDRE
Hauteur, timbre et harmoniques relevaient de l'enseignement de spécialité de l'ancien Bac S. Ces notions ne figurent plus au programme actuel de la spécialité physique-chimie de Terminale.

3.2 Quelle est la fréquence associée au mode fondamental de vibration de la corde ?

Données utiles son complexe du la_3 : 440 Hz

La fréquence d'un son complexe est celle de son fondamental, c'est-à-dire celle du mode fondamental de vibration de la corde.

$f_1 = 440 \text{ Hz}$

COMPRENDRE
Un son complexe est une somme de sons purs de fréquences f_1, $2f_1$, $3f_1$… Le signal obtenu se répète à la fréquence la plus basse, f_1 : c'est elle que l'oreille identifie comme la note.

3.3.1 Donner la fréquence de l'harmonique de rang 7.

Données utiles $f_1 = 440$ Hz (Q3.2)

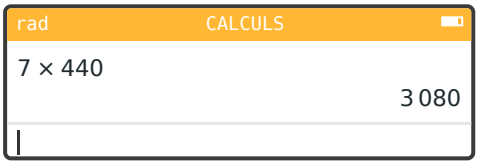
La fréquence de l'harmonique de rang n est un multiple entier de celle du fondamental : $f_n = n\,f_1$.

$f_7 = 7\,f_1 = 7 \times 440 = 3\,080 \text{ Hz}$

$f_7 = 3{,}08 \times 10^3 \text{ Hz}$

COMPRENDRE
Le rang 7 est un nombre exact : il ne limite pas la précision. Le résultat garde les trois chiffres significatifs de 440 Hz.

À LA CALCULATRICE



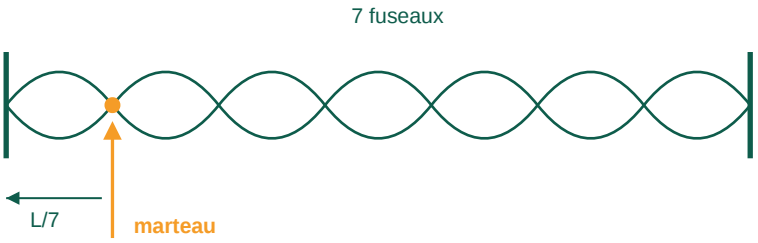
3.3.2 Pourquoi un marteau frappant au septième de la longueur de la corde élimine-t-il l'harmonique 7 du son émis ?

Dans le mode 7, la corde est partagée en sept fuseaux de même longueur $\frac{L}{7}$. Le point situé à $\frac{L}{7}$ d'une extrémité est donc un nœud de vibration de ce mode : il doit rester immobile.

Or le marteau met en mouvement le point qu'il frappe. Ce point ne peut pas être un nœud : le mode 7 n'est pas excité.

Le point frappé, à $\frac{L}{7}$, est un nœud du mode 7 : ce mode ne s'établit pas et l'harmonique 7 est absent du son.

COMPRENDRE
Un mode n'est excité que si la corde peut bouger là où on la frappe. Frapper au neuvième de la longueur élimine de la même façon l'harmonique 9.



3.3.2 · Mode 7 : le point d'impact du marteau, à L/7, est un nœud

3.3.3 Quelle caractéristique du son émis par l'instrument est modifiée par la suppression de l'harmonique 7 ?

Le fondamental garde la même fréquence : la hauteur du son n'est pas modifiée. En revanche, la composition du son en harmoniques change.

La suppression de l'harmonique 7 modifie le **timbre** du son.

PIÈGE
Répondre « la hauteur ». La hauteur ne dépend que de la fréquence du fondamental, ici toujours 440 Hz ; le timbre dépend du nombre et de l'amplitude des harmoniques.

4 À masse linéique et tension identiques, la corde de huit mètres correspondrait-elle à la note la plus grave ou à la plus aiguë ? Justifier.

La hauteur de la note est fixée par la fréquence du fondamental : $f_1 = \dfrac{V}{2L}$ (Q2), avec $V = \sqrt{\dfrac{F}{\mu}}$.

Toutes les cordes ont ici la même tension F et la même masse linéique μ : la célérité V est la même pour toutes. La fréquence f_1 est alors inversement proportionnelle à la longueur L.

La corde la plus longue a donc la fréquence fondamentale la plus faible.

La corde de huit mètres correspondrait à la note la plus **grave**.

MÉTHODE
Pour justifier un sens de variation, écrire la relation littérale, dire ce qui reste constant (F et μ, donc V), puis conclure sur la grandeur qui varie.

5.1 Quelle caractéristique de la corde vibrante est modifiée par l'enroulement du fil de cuivre sur le fil d'acier ?

Le fil de cuivre ajoute de la masse sans changer la longueur de la corde : la masse par unité de longueur augmente.

L'enroulement modifie (augmente) la **masse linéique** μ de la corde.

COMPRENDRE
Quand μ augmente, $V = \sqrt{F/\mu}$ diminue, donc $f_1 = V/(2L)$ aussi : on obtient une note grave avec une corde courte, sans toucher à la tension.

5.2 Calculer la masse de la corde filée qui donne la note de fréquence f.

Données utiles $f = 27{,}5$ Hz ; $L = 0{,}50$ m ; $F = 400$ N

La note émise a la fréquence du fondamental : $f = \dfrac{V}{2L}$ (Q2), donc $V = 2Lf$.

Par ailleurs $V = \sqrt{\dfrac{F}{\mu}}$ et la masse linéique vaut $\mu = \dfrac{m}{L}$, d'où $V^2 = \dfrac{F\,L}{m}$.

En égalant : $4L^2f^2 = \dfrac{F\,L}{m}$, soit

$$m = \frac{F}{4\,L\,f^2}$$

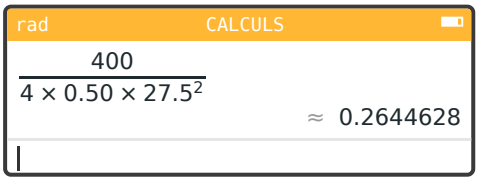
$$m = \frac{400}{4 \times 0{,}50 \times 27{,}5^2} = 0{,}26 \text{ kg}$$

$m = 0{,}26$ kg

PIÈGE
Oublier d'élever au carré en éliminant la racine, ou s'arrêter à $\mu = 0{,}53\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-1}$: la question demande la masse $m = \mu L$.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme $L = 0{,}50$ m, la donnée la moins précise. Unités : $\text{N}/(\text{m}\cdot\text{s}^{-2}) = \text{kg}$, le résultat est bien une masse.

À LA CALCULATRICE



Découverte d'une exo-planète habitable

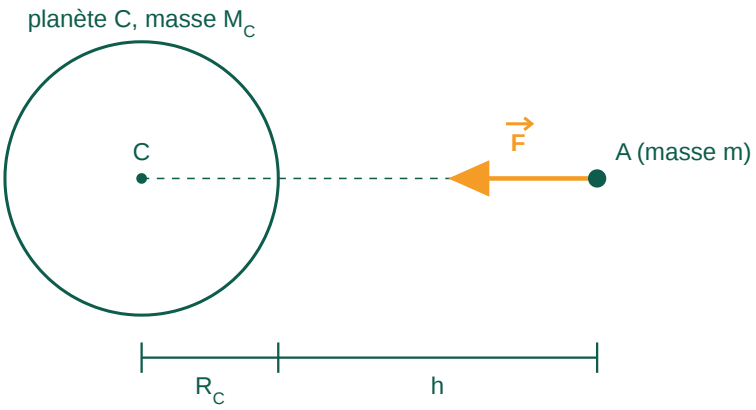
Bac S 2008 Liban (ancien programme) · Exercice 4 **5,5 points** **Durée conseillée 1 h 05**

1.1 Première partie. Représenter sur un schéma la force de gravitation $\vec{F}$ exercée par la planète C sur un objet A de masse m situé à l'altitude h.

La force $\vec{F}$ s'applique en A, sa direction est la droite (AC) et elle est orientée de A vers le centre C de la planète (force attractive).

Voir le schéma : $\vec{F}$ part de A et pointe vers le centre C.

PIÈGE
Dessiner la force à partir du centre de la planète, ou dirigée vers l'extérieur. C'est A qui subit la force : le vecteur part de A.



1.1 · Force de gravitation exercée par la planète C sur l'objet A

1.2 Première partie. Donner l'expression de la valeur de cette force en fonction de M_C, m, R_C, h et G.

La distance entre le centre de la planète et l'objet est $CA = R_C + h$.

$$F = \frac{G\,m\,M_C}{(R_C + h)^2}$$

PIÈGE
Écrire h^2 au dénominateur : la loi de gravitation fait intervenir la distance entre les centres, pas l'altitude.

1.3 Première partie. Sachant que $g = \frac{F}{m}$, en déduire l'expression de g_0, valeur du champ de gravitation à la surface de la planète C, en fonction de M_C, R_C et G.

$$g = \frac{F}{m} = \frac{G\,M_C}{(R_C + h)^2}$$

À la surface de la planète, $h = 0$:

$$g_0 = \frac{G\,M_C}{R_C^2}$$

COMPRENDRE
Le champ de gravitation ne dépend pas de la masse m de l'objet : il caractérise la planète en un point donné.

2.1 Première partie. Déterminer l'expression de la valeur V_1 de la vitesse de l'objet A satellisé sur une orbite circulaire à l'altitude h.

Système {objet A}, de masse m constante ; référentiel lié au centre de C, supposé galiléen ; seule force : $\vec{F}$.

Deuxième loi de Newton : $\vec{F} = m\,\vec{a}$. Dans le repère de Frenet ($\vec{u}_N$ dirigé vers C) :

$$\frac{G\,m\,M_C}{(R_C+h)^2}\,\vec{u}_N = m\left(\frac{{V_1}^2}{R_C+h}\,\vec{u}_N + \frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}_T\right)$$

Selon $\vec{u}_T$: $\dfrac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}t} = 0$, le mouvement est uniforme.

Selon $\vec{u}_N$: $\dfrac{G\,M_C}{(R_C+h)^2} = \dfrac{{V_1}^2}{R_C+h}$, soit ${V_1}^2 = \dfrac{G\,M_C}{R_C+h}$.

$$V_1 = \sqrt{\frac{G\,M_C}{R_C+h}}$$

PIÈGE
Le rayon de l'orbite est $R_C + h$, au carré dans la force mais à la puissance 1 dans l'accélération $\dfrac{{V_1}^2}{R_C+h}$. Une simplification trop rapide fait perdre la racine.

MÉTHODE
Orbite circulaire : 1) système, référentiel, force ; 2) deuxième loi de Newton ; 3) accélération dans le repère de Frenet ; 4) identification selon $\vec{u}_N$ pour obtenir la vitesse.

2.2 Première partie. Montrer que si h est négligeable devant R_C, $V_1 = \sqrt{\dfrac{G\,M_C}{R_C}}$.

Si $h \ll R_C$, alors $R_C + h \approx R_C$. L'expression de la question 2.1 devient :

$V_1 = \sqrt{\dfrac{G\,M_C}{R_C}}$, c'est l'expression attendue.

3 Première partie. La vitesse de libération s'écrit $V_2 = \sqrt{\dfrac{2\,G\,M_C}{R_C}}$. Pour une autre planète de masse M donnée, V_2 augmente-t-elle ou diminue-t-elle avec le rayon de la planète ? Justifier.

Pour une planète de masse M et de rayon R : $V_2 = \sqrt{\dfrac{2\,G\,M}{R}}$.

G et M étant fixés, R est au dénominateur sous la racine : quand R augmente, le quotient $\dfrac{2\,G\,M}{R}$ diminue, et sa racine carrée aussi.

La vitesse de libération V_2 **diminue** quand le rayon de la planète augmente.

COMPRENDRE
À masse égale, une planète plus grosse retient moins bien un objet posé à sa surface : il est plus loin du centre, donc moins attiré.

4.1 Première partie. Montrer que la vitesse V_2 peut aussi s'écrire $V_2 = \sqrt{2\,g_0\,R_C}$.

Données utiles $g_0 = \dfrac{G\,M_C}{R_C^2}$ (question 1.3)

D'après la question 1.3 : $G\,M_C = g_0\,R_C^2$.

On remplace dans l'expression de V_2 : $V_2 = \sqrt{\dfrac{2\,g_0\,R_C^2}{R_C}}$

$V_2 = \sqrt{2\,g_0\,R_C}$, c'est l'expression attendue.

COMPRENDRE
Cette écriture permet de se passer de la valeur de G, comme l'impose l'énoncé : g_0 et R_C suffisent.

4.2 Première partie. Calculer la vitesse de libération pour la planète C et la comparer à celle de la Terre, qui vaut $11{,}2\ \text{km}\cdot\text{s}^{-1}$.

Données utiles $g_0 = 22\ \text{N}\cdot\text{kg}^{-1}$; $R_C = 9{,}6\times10^{6}\ \text{m}$

$$V_2 = \sqrt{2\,g_0\,R_C} = \sqrt{2\times22\times9{,}6\times10^{6}} = 2{,}1\times10^{4}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

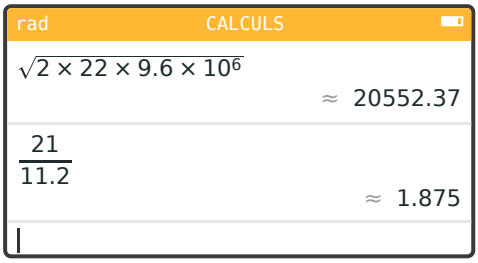
Comparaison : $\dfrac{V_2}{V_{2,\text{Terre}}} = \dfrac{21}{11{,}2} \approx 1{,}9$

$V_2 = 21\ \text{km}\cdot\text{s}^{-1}$: la vitesse de libération de la planète C est presque deux fois plus grande que celle de la Terre.

PIÈGE
Laisser le résultat en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ et le comparer directement à 11,2 : il faut la même unité des deux côtés. « Comparer » demande une conclusion chiffrée.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme g_0 et R_C. Le nombre 2 de la formule est exact : il ne limite pas la précision.

À LA CALCULATRICE



4.3 Première partie. Si la planète C et la Terre sont soumises à des conditions de température très voisines, l'existence d'une atmosphère sur la planète C est-elle possible ?

À températures voisines, les molécules de gaz ont des vitesses d'agitation comparables sur les deux planètes.

Sur Terre, une vitesse de libération de $11{,}2\ \text{km}\cdot\text{s}^{-1}$ suffit à retenir une atmosphère. Sur la planète C, la vitesse de libération est encore plus grande (question 4.2) : les molécules s'échappent plus difficilement.

Oui, l'existence d'une atmosphère sur la planète C est possible.

COMPRENDRE
La vitesse des molécules augmente avec la température. Une planète perd son atmosphère si cette vitesse d'agitation atteint la vitesse de libération : planète trop chaude ou trop peu massive.

1 Deuxième partie. La vitesse d'une planète en mouvement circulaire uniforme autour de son étoile est $V = \sqrt{\dfrac{G\,M}{r}}$. Donner la signification de la lettre M.

M est la masse de l'astre attracteur, c'est-à-dire la masse de l'étoile E (Gliese 581).

PIÈGE
Répondre « la masse de la planète ». La masse de l'objet en orbite se simplifie dans la deuxième loi de Newton : seule reste la masse de l'astre central.

2.1 Deuxième partie. Énoncer la troisième loi de Kepler, relative à la période de révolution de la planète autour de son étoile.

Pour toutes les planètes en orbite autour d'une même étoile, le carré de la période de révolution T est proportionnel au cube du demi-grand axe de l'orbite. Pour une orbite circulaire de rayon r :

$\dfrac{T^2}{r^3} = k$, où k est une constante identique pour toutes les planètes de l'étoile.

COMPRENDRE
La constante k ne dépend que de la masse de l'étoile : elle change si l'on change d'astre attracteur.

2.2 Deuxième partie. Calculer la constante de proportionnalité de cette loi à partir du tableau, avec le jour pour unité de temps et l'unité astronomique pour unité de distance.

Données utiles $T_c = 12{,}93$ j ; $r_c = 7{,}27 \times 10^{-2}$ U.A. ; $T_d = 84{,}4$ j ; $r_d = 2{,}54 \times 10^{-1}$ U.A.

Avec les données de la planète C :

$$k = \frac{T_c^2}{r_c^3} = \frac{12{,}93^2}{(7{,}27 \times 10^{-2})^3} = 4{,}35 \times 10^5 \text{ j}^2 \cdot \text{U.A.}^{-3}$$

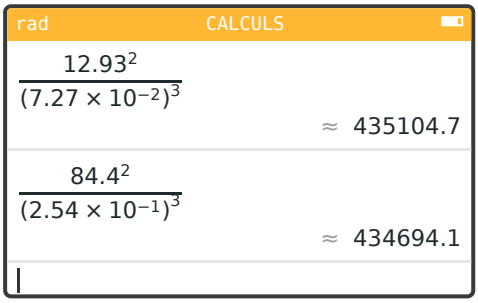
Vérification avec la planète D : $\dfrac{84{,}4^2}{(2{,}54 \times 10^{-1})^3} = 4{,}35 \times 10^5 \text{ j}^2 \cdot \text{U.A.}^{-3}$, même valeur.

$k = 4{,}35 \times 10^5 \text{ j}^2 \cdot \text{U.A.}^{-3}$

PIÈGE
Convertir en secondes et en mètres : l'énoncé impose le jour et l'unité astronomique. Ne pas oublier l'unité de k.

COMPRENDRE
Trois chiffres significatifs, comme r_c. Les deux planètes donnent la même constante : la loi est bien vérifiée.

À LA CALCULATRICE



2.3 Deuxième partie. Calculer, en unité astronomique, le rayon de la trajectoire de la planète B.

Données utiles $T_b = 5{,}366$ j ; $T_c = 12{,}93$ j ; $r_c = 7{,}27 \times 10^{-2}$ U.A.

Les planètes B et C tournent autour de la même étoile : $\dfrac{T_b^2}{r_b^3} = \dfrac{T_c^2}{r_c^3} = k$, donc $r_b = r_c \left(\dfrac{T_b}{T_c}\right)^{2/3}$

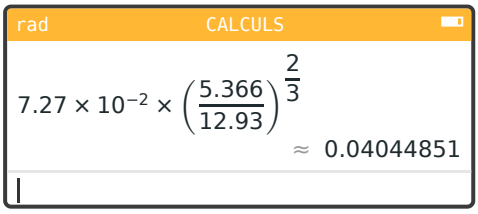
$$r_b = 7{,}27 \times 10^{-2} \times \left(\frac{5{,}366}{12{,}93}\right)^{2/3}$$

$r_b = 4{,}04 \times 10^{-2}$ U.A.

PIÈGE
Inverser l'exposant : r varie comme $T^{2/3}$, et non comme $T^{3/2}$. Vérifier que $r_b < r_c$ puisque $T_b < T_c$.

COMPRENDRE
Avec la valeur arrondie de k, $r_b = \sqrt[3]{T_b^2/k}$ donne $4{,}05 \times 10^{-2}$ U.A. : écart d'arrondi, accepté. B a la plus courte période, donc la plus petite orbite : le résultat est cohérent.

À LA CALCULATRICE



1 Troisième partie. Que signifie l'expression « l'énergie des molécules est quantifiée » ?

L'énergie de vibration d'une molécule ne peut prendre que certaines valeurs bien définies (valeurs discrètes : 0 ; 0,20 ; 0,45 ; 0,47 eV…), et aucune valeur intermédiaire.

2 Troisième partie. Les longueurs d'onde des radiations absorbées sont supérieures au micromètre. Ces radiations appartiennent-elles au domaine du visible ? Justifier.

Le domaine visible s'étend environ de 400 nm à 800 nm, soit de $0{,}4\ \mu\text{m}$ à $0{,}8\ \mu\text{m}$.

Les radiations absorbées ont une longueur d'onde supérieure à $1\ \mu\text{m}$, donc supérieure à $0{,}8\ \mu\text{m}$.

Non : ces radiations n'appartiennent pas au visible, elles sont dans l'infrarouge.

PIÈGE
Comparer des nanomètres à des micromètres sans convertir : $1\ \mu\text{m} = 1000$ nm.

3 Troisième partie. Calculer la longueur d'onde de la radiation absorbée par une molécule d'eau passant de l'état fondamental à l'état E_1.

Données utiles $E_1 = 0{,}20$ eV ; $h = 6{,}626 \times 10^{-34}$ J · s ; $c = 3{,}00 \times 10^{8}$ m · s^{-1} ; 1 eV $= 1{,}6 \times 10^{-19}$ J

Le photon absorbé apporte exactement l'écart d'énergie entre les deux niveaux :

$$\Delta E = E_1 - 0 = \frac{h\,c}{\lambda}, \text{ donc } \lambda = \frac{h\,c}{E_1}, \text{ avec } E_1 \text{ en joules.}$$

$$\lambda = \frac{6{,}626 \times 10^{-34} \times 3{,}00 \times 10^{8}}{0{,}20 \times 1{,}6 \times 10^{-19}} = 6{,}2 \times 10^{-6}\ \text{m}$$

$\lambda = 6{,}2\ \mu\text{m}$, valeur bien supérieure au micromètre (infrarouge).

PIÈGE
Laisser l'énergie en électronvolts : dans $\lambda = \frac{h\,c}{E}$, l'énergie doit être en joules. Sans la conversion, le résultat est faux d'un facteur 10^{19}.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme E_1. Le résultat confirme la question précédente : la vapeur d'eau absorbe dans l'infrarouge.

À LA CALCULATRICE

