Découverte d'une exo-planète habitable

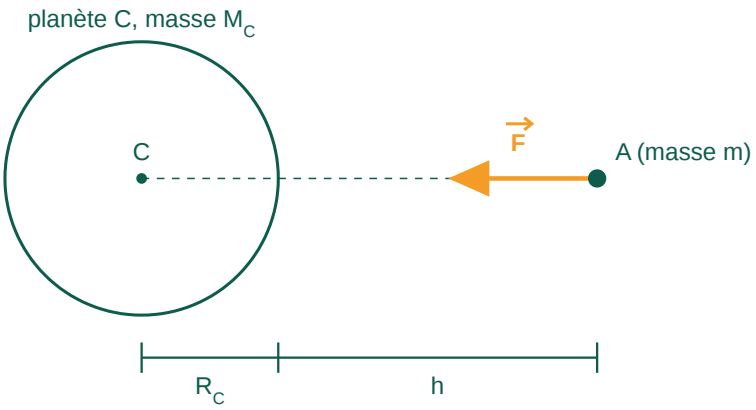
Bac S 2008 Liban (ancien programme) · Exercice 4 **5,5 points** **Durée conseillée 1 h 05**

1.1 Première partie. Représenter sur un schéma la force de gravitation $\vec{F}$ exercée par la planète C sur un objet A de masse m situé à l'altitude h.

La force $\vec{F}$ s'applique en A, sa direction est la droite (AC) et elle est orientée de A vers le centre C de la planète (force attractive).

Voir le schéma : $\vec{F}$ part de A et pointe vers le centre C.

PIÈGE
Dessiner la force à partir du centre de la planète, ou dirigée vers l'extérieur. C'est A qui subit la force : le vecteur part de A.



1.1 · Force de gravitation exercée par la planète C sur l'objet A

1.2 Première partie. Donner l'expression de la valeur de cette force en fonction de M_C, m, R_C, h et G.

La distance entre le centre de la planète et l'objet est $CA = R_C + h$.

$$F = \frac{G\,m\,M_C}{(R_C + h)^2}$$

PIÈGE
Écrire h^2 au dénominateur : la loi de gravitation fait intervenir la distance entre les centres, pas l'altitude.

1.3 Première partie. Sachant que $g = \frac{F}{m}$, en déduire l'expression de g_0, valeur du champ de gravitation à la surface de la planète C, en fonction de M_C, R_C et G.

$$g = \frac{F}{m} = \frac{G\,M_C}{(R_C + h)^2}$$

À la surface de la planète, $h = 0$:

$$g_0 = \frac{G\,M_C}{R_C^2}$$

COMPRENDRE
Le champ de gravitation ne dépend pas de la masse m de l'objet : il caractérise la planète en un point donné.

2.1 Première partie. Déterminer l'expression de la valeur V_1 de la vitesse de l'objet A satellisé sur une orbite circulaire à l'altitude h.

Système {objet A}, de masse m constante ; référentiel lié au centre de C, supposé galiléen ; seule force : $\vec{F}$.

Deuxième loi de Newton : $\vec{F} = m\,\vec{a}$. Dans le repère de Frenet ($\vec{u}_N$ dirigé vers C) :

$$\frac{G\,m\,M_C}{(R_C+h)^2}\,\vec{u}_N = m\left(\frac{{V_1}^2}{R_C+h}\,\vec{u}_N + \frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}_T\right)$$

Selon $\vec{u}_T$: $\dfrac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}t} = 0$, le mouvement est uniforme.

Selon $\vec{u}_N$: $\dfrac{G\,M_C}{(R_C+h)^2} = \dfrac{{V_1}^2}{R_C+h}$, soit ${V_1}^2 = \dfrac{G\,M_C}{R_C+h}$.

$$V_1 = \sqrt{\frac{G\,M_C}{R_C+h}}$$

PIÈGE
Le rayon de l'orbite est $R_C + h$, au carré dans la force mais à la puissance 1 dans l'accélération $\dfrac{{V_1}^2}{R_C+h}$. Une simplification trop rapide fait perdre la racine.

MÉTHODE
Orbite circulaire : 1) système, référentiel, force ; 2) deuxième loi de Newton ; 3) accélération dans le repère de Frenet ; 4) identification selon $\vec{u}_N$ pour obtenir la vitesse.

2.2 Première partie. Montrer que si h est négligeable devant R_C, $V_1 = \sqrt{\dfrac{G\,M_C}{R_C}}$.

Si $h \ll R_C$, alors $R_C + h \approx R_C$. L'expression de la question 2.1 devient :

$V_1 = \sqrt{\dfrac{G\,M_C}{R_C}}$, c'est l'expression attendue.

3 Première partie. La vitesse de libération s'écrit $V_2 = \sqrt{\dfrac{2\,G\,M_C}{R_C}}$. Pour une autre planète de masse M donnée, V_2 augmente-t-elle ou diminue-t-elle avec le rayon de la planète ? Justifier.

Pour une planète de masse M et de rayon R : $V_2 = \sqrt{\dfrac{2\,G\,M}{R}}$.

G et M étant fixés, R est au dénominateur sous la racine : quand R augmente, le quotient $\dfrac{2\,G\,M}{R}$ diminue, et sa racine carrée aussi.

La vitesse de libération V_2 **diminue** quand le rayon de la planète augmente.

COMPRENDRE
À masse égale, une planète plus grosse retient moins bien un objet posé à sa surface : il est plus loin du centre, donc moins attiré.

4.1 Première partie. Montrer que la vitesse V_2 peut aussi s'écrire $V_2 = \sqrt{2\,g_0\,R_C}$.

Données utiles $g_0 = \dfrac{G\,M_C}{R_C^2}$ (question 1.3)

D'après la question 1.3 : $G\,M_C = g_0\,R_C^2$.

On remplace dans l'expression de V_2 : $V_2 = \sqrt{\dfrac{2\,g_0\,R_C^2}{R_C}}$

$V_2 = \sqrt{2\,g_0\,R_C}$, c'est l'expression attendue.

COMPRENDRE
Cette écriture permet de se passer de la valeur de G, comme l'impose l'énoncé : g_0 et R_C suffisent.

4.2 Première partie. Calculer la vitesse de libération pour la planète C et la comparer à celle de la Terre, qui vaut $11{,}2\ \text{km}\cdot\text{s}^{-1}$.

Données utiles $g_0 = 22\ \text{N}\cdot\text{kg}^{-1}$; $R_C = 9{,}6\times10^6\ \text{m}$

$$V_2 = \sqrt{2\,g_0\,R_C} = \sqrt{2\times22\times9{,}6\times10^6} = 2{,}1\times10^4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

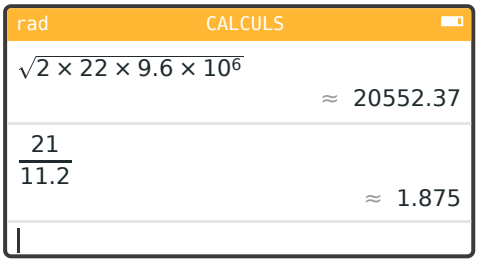
Comparaison : $\dfrac{V_2}{V_{2,\text{Terre}}} = \dfrac{21}{11{,}2} \approx 1{,}9$

$V_2 = 21\ \text{km}\cdot\text{s}^{-1}$: la vitesse de libération de la planète C est presque deux fois plus grande que celle de la Terre.

PIÈGE
Laisser le résultat en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ et le comparer directement à 11,2 : il faut la même unité des deux côtés. « Comparer » demande une conclusion chiffrée.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme g_0 et R_C. Le nombre 2 de la formule est exact : il ne limite pas la précision.

À LA CALCULATRICE



4.3 Première partie. Si la planète C et la Terre sont soumises à des conditions de température très voisines, l'existence d'une atmosphère sur la planète C est-elle possible ?

À températures voisines, les molécules de gaz ont des vitesses d'agitation comparables sur les deux planètes.

Sur Terre, une vitesse de libération de $11{,}2\ \text{km}\cdot\text{s}^{-1}$ suffit à retenir une atmosphère. Sur la planète C, la vitesse de libération est encore plus grande (question 4.2) : les molécules s'échappent plus difficilement.

Oui, l'existence d'une atmosphère sur la planète C est possible.

COMPRENDRE
La vitesse des molécules augmente avec la température. Une planète perd son atmosphère si cette vitesse d'agitation atteint la vitesse de libération : planète trop chaude ou trop peu massive.

1 Deuxième partie. La vitesse d'une planète en mouvement circulaire uniforme autour de son étoile est $V = \sqrt{\dfrac{G\,M}{r}}$. Donner la signification de la lettre M.

M est la masse de l'astre attracteur, c'est-à-dire la masse de l'étoile E (Gliese 581).

PIÈGE
Répondre « la masse de la planète ». La masse de l'objet en orbite se simplifie dans la deuxième loi de Newton : seule reste la masse de l'astre central.

2.1 Deuxième partie. Énoncer la troisième loi de Kepler, relative à la période de révolution de la planète autour de son étoile.

Pour toutes les planètes en orbite autour d'une même étoile, le carré de la période de révolution T est proportionnel au cube du demi-grand axe de l'orbite. Pour une orbite circulaire de rayon r :

$\dfrac{T^2}{r^3} = k$, où k est une constante identique pour toutes les planètes de l'étoile.

COMPRENDRE
La constante k ne dépend que de la masse de l'étoile : elle change si l'on change d'astre attracteur.

2.2 Deuxième partie. Calculer la constante de proportionnalité de cette loi à partir du tableau, avec le jour pour unité de temps et l'unité astronomique pour unité de distance.

Données utiles $T_c = 12{,}93$ j ; $r_c = 7{,}27 \times 10^{-2}$ U.A. ; $T_d = 84{,}4$ j ; $r_d = 2{,}54 \times 10^{-1}$ U.A.

Avec les données de la planète C :

$$k = \frac{T_c^2}{r_c^3} = \frac{12{,}93^2}{(7{,}27 \times 10^{-2})^3} = 4{,}35 \times 10^5 \text{ j}^2 \cdot \text{U.A.}^{-3}$$

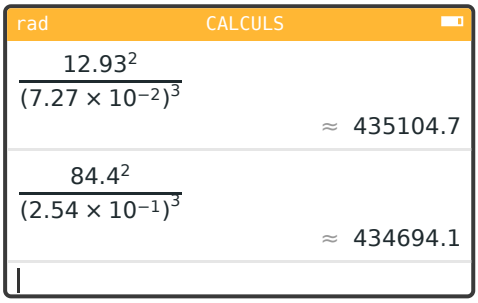
Vérification avec la planète D : $\dfrac{84{,}4^2}{(2{,}54 \times 10^{-1})^3} = 4{,}35 \times 10^5 \text{ j}^2 \cdot \text{U.A.}^{-3}$, même valeur.

$k = 4{,}35 \times 10^5 \text{ j}^2 \cdot \text{U.A.}^{-3}$

PIÈGE
Convertir en secondes et en mètres : l'énoncé impose le jour et l'unité astronomique. Ne pas oublier l'unité de k.

COMPRENDRE
Trois chiffres significatifs, comme r_c. Les deux planètes donnent la même constante : la loi est bien vérifiée.

À LA CALCULATRICE



2.3 Deuxième partie. Calculer, en unité astronomique, le rayon de la trajectoire de la planète B.

Données utiles $T_b = 5{,}366$ j ; $T_c = 12{,}93$ j ; $r_c = 7{,}27 \times 10^{-2}$ U.A.

Les planètes B et C tournent autour de la même étoile : $\dfrac{T_b^2}{r_b^3} = \dfrac{T_c^2}{r_c^3} = k$, donc $r_b = r_c \left(\dfrac{T_b}{T_c}\right)^{2/3}$

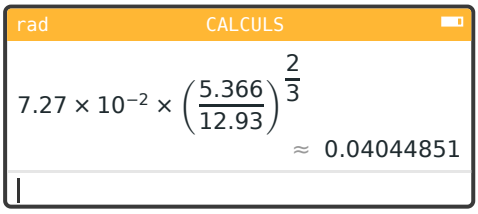
$$r_b = 7{,}27 \times 10^{-2} \times \left(\frac{5{,}366}{12{,}93}\right)^{2/3}$$

$r_b = 4{,}04 \times 10^{-2}$ U.A.

PIÈGE
Inverser l'exposant : r varie comme $T^{2/3}$, et non comme $T^{3/2}$. Vérifier que $r_b < r_c$ puisque $T_b < T_c$.

COMPRENDRE
Avec la valeur arrondie de k, $r_b = \sqrt[3]{T_b^2/k}$ donne $4{,}05 \times 10^{-2}$ U.A. : écart d'arrondi, accepté. B a la plus courte période, donc la plus petite orbite : le résultat est cohérent.

À LA CALCULATRICE



1 Troisième partie. Que signifie l'expression « l'énergie des molécules est quantifiée » ?

L'énergie de vibration d'une molécule ne peut prendre que certaines valeurs bien définies (valeurs discrètes : 0 ; 0,20 ; 0,45 ; 0,47 eV…), et aucune valeur intermédiaire.

2 Troisième partie. Les longueurs d'onde des radiations absorbées sont supérieures au micromètre. Ces radiations appartiennent-elles au domaine du visible ? Justifier.

Le domaine visible s'étend environ de 400 nm à 800 nm, soit de $0{,}4\ \mu\text{m}$ à $0{,}8\ \mu\text{m}$.

Les radiations absorbées ont une longueur d'onde supérieure à $1\ \mu\text{m}$, donc supérieure à $0{,}8\ \mu\text{m}$.

Non : ces radiations n'appartiennent pas au visible, elles sont dans l'infrarouge.

PIÈGE
Comparer des nanomètres à des micromètres sans convertir : $1\ \mu\text{m} = 1000$ nm.

3 Troisième partie. Calculer la longueur d'onde de la radiation absorbée par une molécule d'eau passant de l'état fondamental à l'état E_1.

Données utiles $E_1 = 0{,}20$ eV ; $h = 6{,}626 \times 10^{-34}$ J · s ; $c = 3{,}00 \times 10^{8}$ m · s^{-1} ; 1 eV $= 1{,}6 \times 10^{-19}$ J

Le photon absorbé apporte exactement l'écart d'énergie entre les deux niveaux :

$$\Delta E = E_1 - 0 = \frac{h\,c}{\lambda}, \text{ donc } \lambda = \frac{h\,c}{E_1}, \text{ avec } E_1 \text{ en joules.}$$

$$\lambda = \frac{6{,}626 \times 10^{-34} \times 3{,}00 \times 10^{8}}{0{,}20 \times 1{,}6 \times 10^{-19}} = 6{,}2 \times 10^{-6}\ \text{m}$$

$\lambda = 6{,}2\ \mu\text{m}$, valeur bien supérieure au micromètre (infrarouge).

PIÈGE
Laisser l'énergie en électronvolts : dans $\lambda = \frac{h\,c}{E}$, l'énergie doit être en joules. Sans la conversion, le résultat est faux d'un facteur 10^{19}.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme E_1. Le résultat confirme la question précédente : la vapeur d'eau absorbe dans l'infrarouge.

À LA CALCULATRICE

