Sur une balançoire

Bac S 2008 Nouvelle-Calédonie rattrapage (ancien programme) · Exercice 1 **6,5 points** **Durée conseillée 1 h 18**

1.1 Par une analyse dimensionnelle, choisir parmi $2\pi\sqrt{\frac{m_2}{g}}$, $2\pi\sqrt{\frac{m_2}{L}}$ et $2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ la seule expression possible de la période propre T_{02}.

Une période est une durée : $[T_{02}] = \mathrm{T}$. Le facteur 2π est sans dimension. L'intensité de la pesanteur est une accélération : $[g] = \mathrm{L} \cdot \mathrm{T}^{-2}$.

- $\left[\sqrt{\frac{m_2}{g}}\right] = \frac{\mathrm{M}^{1/2}}{\mathrm{L}^{1/2} \cdot \mathrm{T}^{-1}} = \mathrm{M}^{1/2} \cdot \mathrm{L}^{-1/2} \cdot \mathrm{T}$: ce n'est pas une durée.
- $\left[\sqrt{\frac{m_2}{L}}\right] = \mathrm{M}^{1/2} \cdot \mathrm{L}^{-1/2}$: ce n'est pas une durée.
- $\left[\sqrt{\frac{L}{g}}\right] = \left(\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{L} \cdot \mathrm{T}^{-2}}\right)^{1/2} = \left(\mathrm{T}^2\right)^{1/2} = \mathrm{T}$: c'est une durée.

Seule expression homogène à une durée : $T_{02} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

MÉTHODE

Remplacer chaque grandeur par sa dimension (M, L, T), simplifier, puis comparer à la dimension attendue. Avec les unités : g en $\mathrm{N} \cdot \mathrm{kg}^{-1}$ équivaut à $\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$, car $1\ \mathrm{N} = 1\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$.

1.2 En déduire si l'affirmation de Pierre est correcte ou non.

L'expression $T_{02} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ ne contient pas la masse. Les deux systèmes ont la même longueur L au même endroit : $T_{02} = T_{01}$.

La période ne dépend pas de la masse : l'affirmation de Pierre est incorrecte.

1.3 Sophie est lâchée à $t_0 = 0$ sans vitesse initiale depuis $\theta_m = 50^\circ$, sans frottements. Choisir, en justifiant, la courbe $\theta(t)$ qui convient parmi les figures 2 à 5.

- À $t = 0$, on doit lire $\theta = \theta_m = 50^\circ$: la figure 3 ($\theta(0) = 0^\circ$) et la figure 4 ($\theta(0) = 25^\circ$) ne conviennent pas.
- Sans frottements, l'amplitude reste constante : la figure 5, dont l'amplitude diminue, ne convient pas.

La courbe correcte est celle de la figure 2.

MÉTHODE

Procéder par élimination avec deux critères : la valeur initiale (ici 50°, tangente horizontale car la vitesse initiale est nulle), puis l'amplitude (constante sans frottements, décroissante sinon).

1.4 Mesurer la valeur de la période propre T_{01} du système S_1.

Sur la figure 2, la période est la durée qui sépare deux maximums successifs : le premier est à $t = 0$, le suivant à $t \approx 2{,}7$ s.

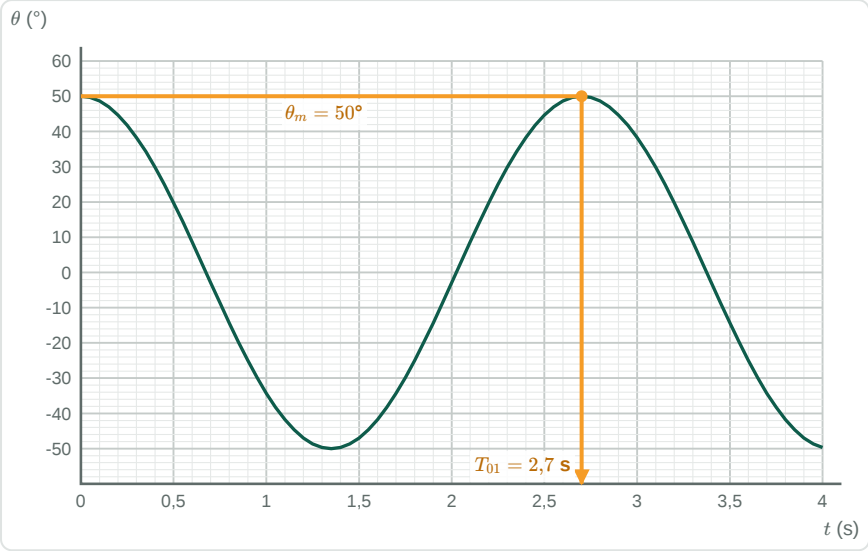
$T_{01} \approx 2{,}7$ s

PIÈGE

Mesurer la durée entre deux passages successifs par $\theta = 0$: on obtient seulement une demi-période (environ 1,35 s).

COMPRENDRE

Vérification possible avec la formule de 1.1 : $2\pi\sqrt{L/g} \approx 2{,}7$ s. La lecture graphique et le modèle du pendule simple sont cohérents.



1.4 · Figure 2 du sujet : durée entre deux maximums successifs

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$2 \times \pi \times \sqrt{\frac{1.80}{9.8}} \approx 2.692794$

2.1 Quelle est la valeur de la vitesse v_A de la bille au point A si Sophie la lâche sans lui donner d'impulsion ?

A est la position d'amplitude maximale : la balançoire y change de sens, sa vitesse est nulle. La bille, lâchée sans impulsion, a la vitesse de la balançoire.

$v_A = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

2.2 Quelle est la nature du mouvement de la bille après avoir été lâchée du point A ?

Sans frottement, la bille n'est soumise qu'à son poids : c'est une chute libre. Sa vitesse initiale étant nulle, elle tombe suivant la verticale passant par A.

Chute libre verticale : mouvement rectiligne uniformément accéléré.

2.3 Déterminer l'abscisse x_1 de la bille lorsqu'elle atteint le sol.

Données utiles $L = 1{,}80 \text{ m}$; $\theta_m = 50^\circ$

La bille tombe verticalement : son abscisse reste celle du point A.
Dans le triangle rectangle formé par le fil (hypoténuse L) et la verticale du point de suspension :

$$\sin\theta_m = \frac{x_1}{L} \quad \text{donc} \quad x_1 = L \sin\theta_m = 1{,}80 \times \sin(50^\circ)$$

$x_1 = 1{,}4 \text{ m}$

À LA CALCULATRICE

deg CALCULS

$1.80 \times \sin(50^\circ) \approx 1.37888$

PIÈGE
Calculatrice en radians : $\sin(50)$ donne alors $-0{,}26$ et une abscisse négative. Vérifier le mode degré.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme $\theta_m = 50^\circ$ et $g = 9{,}8 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$, les données les moins précises de l'exercice.

2.4 En appliquant la conservation de l'énergie mécanique entre A et B, donner l'expression littérale de la vitesse v_B de la bille et montrer que $v_B = 3{,}6\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Données utiles $E_{PA} = 0{,}34$ J ; $m = 30$ g $= 0{,}030$ kg ; $h = 0{,}50$ m ; $g = 9{,}8\ \text{N}\cdot\text{kg}^{-1}$; $v_A = 0$ (2.1)

Sans frottement, l'énergie mécanique de la bille se conserve : $E_{cA} + E_{PA} = E_{cB} + E_{PB}$.

En A, $v_A = 0$ donc $E_{cA} = 0$. En B, l'altitude est $z_B = h$ donc $E_{PB} = m\,g\,h$:

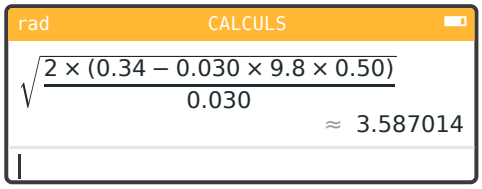
$$E_{PA} = \tfrac{1}{2}\,m\,v_B^2 + m\,g\,h \quad \text{d'où} \quad v_B = \sqrt{\frac{2\,(E_{PA} - m\,g\,h)}{m}}$$

$$v_B = \sqrt{\frac{2 \times (0{,}34 - 0{,}030 \times 9{,}8 \times 0{,}50)}{0{,}030}}$$

$v_B = 3{,}6\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, valeur attendue.

PIÈGE
Écrire $E_{PB} = 0$: l'origine des énergies potentielles est au sol (point O), et B se trouve à l'altitude h. Penser aussi à convertir la masse en kilogrammes.

À LA CALCULATRICE



2.5 Donner les valeurs des coordonnées v_{Bx} et v_{Bz} du vecteur vitesse $\vec{v}_B$ représenté sur la figure 6.

Données utiles $v_B = 3{,}6\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ (2.4)

En B, le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire circulaire, donc horizontal. Sur la figure 6, il est dirigé dans le sens de $\vec{i}$.

$v_{Bx} = v_B = 3{,}6\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ et $v_{Bz} = 0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

COMPRENDRE
Partie de A (côté des x positifs), Sophie passe une première fois en B vers les x négatifs, puis une seconde fois vers les x positifs : d'où le signe positif de v_{Bx}.

2.6 En utilisant la seconde loi de Newton, donner les coordonnées a_x et a_z du vecteur accélération de la bille au cours de sa chute.

Système {bille}, de masse m constante ; référentiel terrestre supposé galiléen ; seule force : le poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$ (pas de frottement).

Seconde loi de Newton : $m\,\vec{a} = \vec{P} = m\,\vec{g}$, donc $\vec{a} = \vec{g}$.

Le vecteur $\vec{g}$ est vertical et dirigé vers le bas, donc opposé à $\vec{k}$.

$a_x = 0$ et $a_z = -g = -9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

PIÈGE
Oublier le signe de a_z : l'axe (Oz) est orienté vers le haut, alors que $\vec{g}$ pointe vers le bas.

2.7 Établir les équations horaires $x(t)$ et $z(t)$, l'origine des dates étant l'instant de passage au point B dans le sens indiqué sur la figure 6.

Données utiles à $t = 0$: $x = 0$, $z = h$, $v_x = v_B$, $v_z = 0$ (2.5) ; $a_x = 0$, $a_z = -g$ (2.6)

Comme $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$, on cherche les primitives de $a_x = 0$ et $a_z = -g$:

$v_x(t) = C_1$ et $v_z(t) = -g\,t + C_2$. À $t = 0$: $v_x(0) = v_B$ et $v_z(0) = 0$, donc $C_1 = v_B$ et $C_2 = 0$:

$$v_x(t) = v_B \qquad v_z(t) = -g\,t$$

Comme $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OG}}{\mathrm{d}t}$, on intègre une seconde fois : $x(t) = v_B\,t + C_3$ et $z(t) = -\tfrac{1}{2}\,g\,t^2 + C_4$. À $t = 0$, la bille est en B : $x(0) = 0$ et $z(0) = h$, donc $C_3 = 0$ et $C_4 = h$.

$x(t) = v_B\,t$ et $z(t) = -\dfrac{1}{2}\,g\,t^2 + h$

MÉTHODE
Deux intégrations successives, de $\vec{a}$ vers $\vec{v}$ puis de $\vec{v}$ vers la position. Après chacune, déterminer les constantes avec les conditions initiales, coordonnée par coordonnée.

2.8 Montrer que l'équation de la trajectoire de la bille est de la forme $z(x) = -\frac{1}{2}\frac{g}{v_B^2}x^2 + h$.

On élimine le temps : $x = v_B\,t$ donne $t = \frac{x}{v_B}$. En reportant dans $z(t)$:

$$z = -\frac{1}{2}\,g\left(\frac{x}{v_B}\right)^2 + h$$

$z(x) = -\frac{1}{2}\frac{g}{v_B^2}x^2 + h$: c'est bien la forme demandée (arc de parabole).

2.9 Donner l'expression littérale de l'abscisse x_2 de la bille lorsqu'elle atteint le sol et calculer sa valeur.

Données utiles $v_B = 3{,}6\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ (2.4) ; $h = 0{,}50\ \text{m}$; $g = 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

La bille touche le sol quand $z(x_2) = 0$:

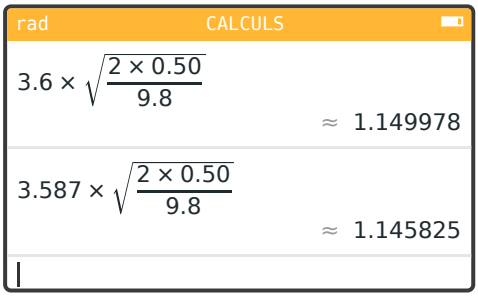
$$-\frac{1}{2}\frac{g}{v_B^2}x_2^2 + h = 0 \quad \text{soit} \quad x_2^2 = \frac{2\,h\,v_B^2}{g}$$

La bille part vers les x positifs, on garde la solution positive : $x_2 = v_B\sqrt{\frac{2\,h}{g}} = 3{,}6 \times \sqrt{\frac{2\times 0{,}50}{9{,}8}}$

$x_2 = v_B\sqrt{\frac{2\,h}{g}} = 1{,}1\ \text{m}$

COMPRENDRE
Le calcul donne 1,15 m, à la limite entre 1,1 et 1,2. Avec la valeur non arrondie de v_B (3,587), on trouve 1,146 m, qui s'arrondit à 1,1 m.

À LA CALCULATRICE



2.10 Comparer x_1 et x_2 et dire si Sophie a raison dans ce cas d'étude.

Données utiles $x_1 = 1{,}4$ m (2.3) ; $x_2 = 1{,}1$ m (2.9)

$x_1 = 1{,}4$ m est supérieure à $x_2 = 1{,}1$ m : lâchée du point le plus haut A, la bille touche le sol plus loin de O que lâchée du point le plus bas B.

$x_1 > x_2$: dans ce cas d'étude, Sophie a tort.

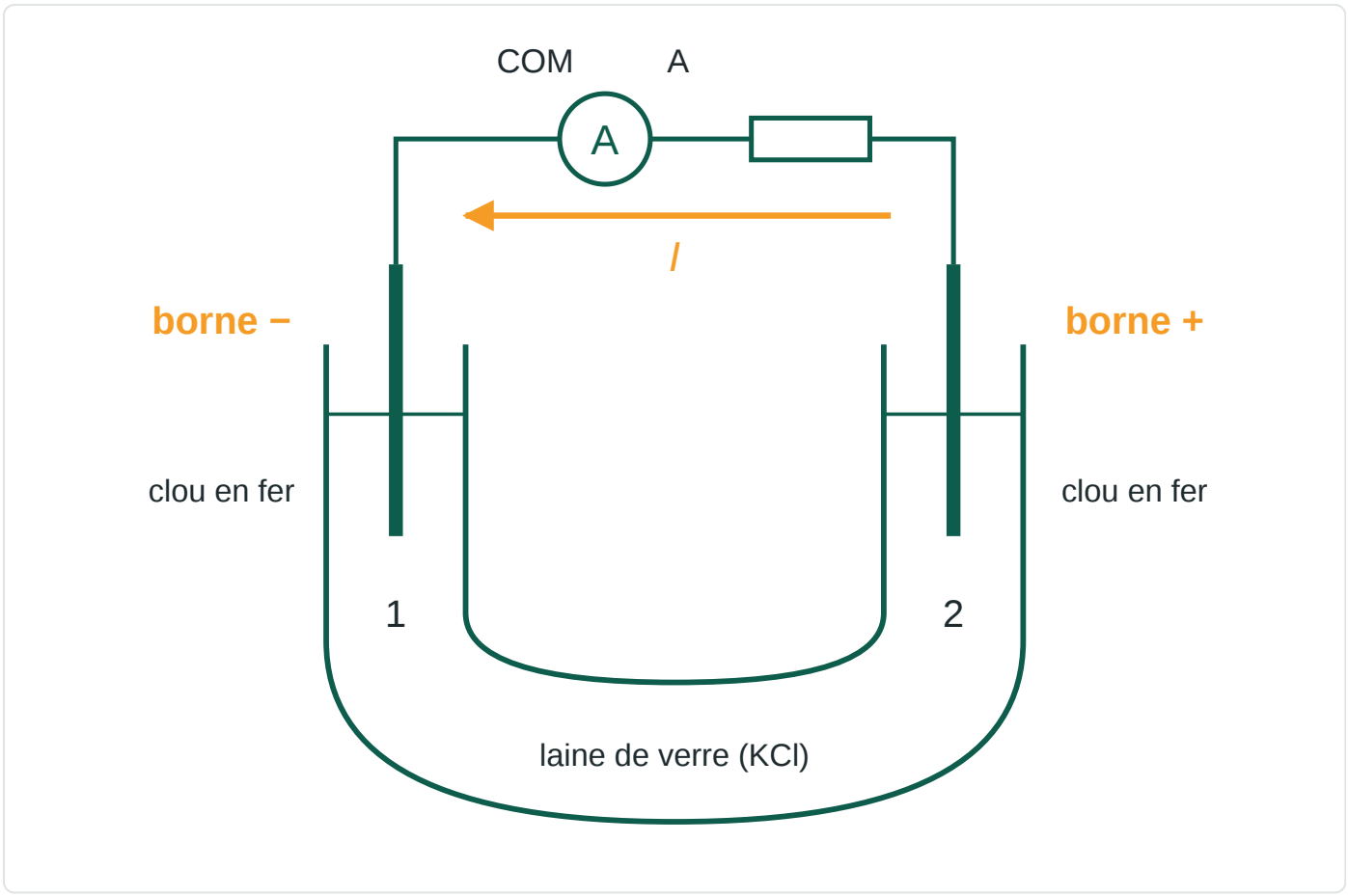
COMPRENDRE
En B, la bille va vite mais elle part de bas ($h = 0{,}50$ m) : sa chute ne dure que 0,32 s. La distance parcourue reste inférieure à l'avance que procure le point A, déjà à 1,4 m de O.

3.1 L'ampèremètre indique une valeur positive. En déduire le sens du courant puis les signes des bornes de la pile.

Un ampèremètre affiche une valeur positive quand le courant entre par sa borne A et sort par sa borne COM. La borne A est reliée, à travers le conducteur ohmique, au clou du compartiment 2 ; la borne COM est reliée au clou du compartiment 1.

Dans le circuit extérieur, le courant circule donc du clou 2 vers le clou 1. Or, à l'extérieur d'une pile, le courant sort par la borne positive et rentre par la borne négative.

Le courant va du clou 2 vers le clou 1 dans le circuit extérieur : le clou 2 est la borne $+$, le clou 1 la borne $-$.



3.1 · Sens du courant et bornes de la pile

3.2 Dans cette pile, quel est le rôle de la laine de verre imbibée de chlorure de potassium ?

Elle joue le rôle de pont salin : ses ions (K^+ et Cl^-) se déplacent entre les deux compartiments, ce qui ferme le circuit électrique et maintient la neutralité électrique de chaque solution.

Pont salin : fermeture du circuit par déplacement d'ions et neutralité électrique des solutions.

COMPRENDRE
Dans les fils, le courant est dû aux électrons ; dans les solutions et le pont, il est dû aux ions. Sans cette jonction, le circuit est ouvert et la pile ne débite pas.

3.3.1 Quelle est l'espèce réduite lors du fonctionnement de cette pile ?

Une espèce réduite est un oxydant qui gagne des électrons. Parmi les réactifs présents (fer et dioxygène dissous), le seul oxydant est le dioxygène, oxydant du couple $O_2\,(aq)$ / $H_2O\,(l)$.

L'espèce réduite est le dioxygène $O_2\,(aq)$.

PIÈGE
Confondre « espèce réduite » et « réducteur ». L'espèce qui subit la réduction est un oxydant ; le fer, réducteur, est oxydé.

3.3.2 Écrire la demi-équation électronique traduisant cette réduction.

$$O_2\,(aq) + 4\,H^+\,(aq) + 4\,e^- = 2\,H_2O\,(l)$$

MÉTHODE
Équilibrer dans l'ordre : l'élément oxygène avec H_2O, l'élément hydrogène avec H^+, puis les charges avec les électrons. Pour une réduction, les électrons sont du côté de l'oxydant.

3.3.3 Comment nomme-t-on l'électrode à laquelle a lieu la réduction ?

L'électrode où se produit la réduction est la cathode.

COMPRENDRE
Ici la cathode est le clou du compartiment 2, riche en dioxygène : les électrons y arrivent, c'est bien la borne $+$ trouvée en 3.1.

3.3.4 On observe à l'autre électrode une oxydation du fer. Écrire la demi-équation électronique traduisant cette oxydation.

$\mathrm{Fe(s) = Fe^{2+}(aq) + 2\,e^-}$

3.4 Un morceau de fer est enfoncé en partie dans le sol. Prévoir, à l'aide de 3.3.1 et 3.3.4, si le fer sera oxydé plutôt dans le sol (zone moins aérée) ou dans l'air.

Dans la pile, le dioxygène est réduit au niveau du clou placé dans la solution riche en dioxygène (compartiment 2), tandis que le fer est oxydé dans le compartiment 1, pauvre en dioxygène.

Par analogie, la partie du portique à l'air correspond au compartiment 2 et la partie enterrée, moins aérée, au compartiment 1.

Le fer est oxydé plutôt dans le sol, zone la moins aérée.

COMPRENDRE
Résultat contre-intuitif : la corrosion attaque la zone qui manque de dioxygène. Le métal conduit les électrons de la partie enterrée (anode) vers la partie aérée (cathode), où le dioxygène est réduit.

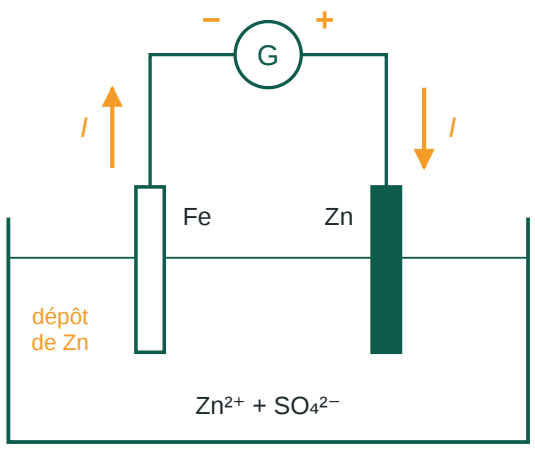
3.5 Préciser le sens du courant dans la partie métallique du circuit et les signes des bornes du générateur, sachant que la lame de fer se recouvre de zinc métallique. Justifier.

Le dépôt de zinc sur la lame de fer correspond à la réduction $\mathrm{Zn^{2+}(aq) + 2\,e^- = Zn(s)}$. Cette réduction consomme des électrons, fournis par le générateur : la lame de fer est reliée à sa borne négative, la lame de zinc à sa borne positive.

Le courant circule en sens inverse des électrons : il sort de la borne $+$ du générateur, arrive à la lame de zinc et, dans les fils, revient de la lame de fer vers la borne $-$.

Lame de fer reliée à la borne $-$, lame de zinc à la borne $+$; dans les fils, le courant va de la lame de fer vers la lame de zinc en traversant le générateur.

COMPRENDRE
C'est une électrolyse : le générateur impose le sens du courant. La lame de fer est la cathode (réduction). À l'anode, le zinc est oxydé en $\mathrm{Zn^{2+}}$, ce qui renouvelle les ions de la solution.



3.5 · Électrozingage : sens du courant et bornes du générateur