Le dauphin à flancs blancs

Bac S 2011 La Réunion (ancien programme) · Exercice 3 **5,5 points** **Durée conseillée 1 h 05**

1 En appliquant la deuxième loi de Newton, donner l'expression du vecteur accélération $\vec{a}_G$ du centre d'inertie du dauphin, puis ses coordonnées a_x et a_y.

Système {dauphin}, de masse m constante ; référentiel terrestre supposé galiléen ; seule force hors de l'eau : le poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$.

Deuxième loi de Newton : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\,\vec{a}_G$, soit $m\,\vec{g} = m\,\vec{a}_G$, donc $\vec{a}_G = \vec{g}$.

Le vecteur $\vec{g}$ est vertical, dirigé vers le bas, et l'axe Oy est orienté vers le haut :

$\vec{a}_G = \vec{g}$, de coordonnées $a_x = 0$ et $a_y = -g$

PIÈGE
Oublier le signe : $\vec{g}$ pointe vers le bas alors que Oy pointe vers le haut, donc $a_y = -g$ et non $+g$.

MÉTHODE
Toujours dans cet ordre : système, référentiel galiléen, bilan des forces, deuxième loi de Newton, puis projection sur les axes du repère.

2.1 En déduire l'expression de la coordonnée $V_x(t)$ en fonction de V_0 et α, puis celle de $V_y(t)$ en fonction de V_0, α, g et t.

Comme $\vec{a}_G = \dfrac{\mathrm{d}\vec{V}}{\mathrm{d}t}$, on cherche les primitives de $a_x = 0$ et de $a_y = -g$:

$V_x(t) = C_1$ et $V_y(t) = -g\,t + C_2$

Conditions initiales : à $t = 0$, $\vec{V} = \vec{V}_0$ de coordonnées $V_0\cos\alpha$ et $V_0\sin\alpha$, donc $C_1 = V_0\cos\alpha$ et $C_2 = V_0\sin\alpha$.

$V_x(t) = V_0\cos\alpha$ et $V_y(t) = -g\,t + V_0\sin\alpha$

COMPRENDRE
V_x ne dépend pas du temps : le mouvement horizontal est uniforme. Seule la vitesse verticale varie, et elle s'annule au sommet de la trajectoire.

2.2 Établir les équations horaires $x(t)$ et $y(t)$ du mouvement du centre d'inertie.

Comme $\vec{V} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OG}}{\mathrm{d}t}$, on cherche les primitives de V_x et de V_y :

$x(t) = V_0\cos\alpha\;t + C_3$ et $y(t) = -\dfrac{1}{2}\,g\,t^2 + V_0\sin\alpha\;t + C_4$

Conditions initiales : à $t = 0$, G est en O, donc $x(0) = 0$ et $y(0) = 0$, d'où $C_3 = 0$ et $C_4 = 0$.

$x(t) = V_0\cos\alpha\;t$ et $y(t) = -\dfrac{1}{2}\,g\,t^2 + V_0\sin\alpha\;t$

PIÈGE
Les constantes d'intégration ne sont pas nulles par principe. Il faut les justifier par la position initiale, ici G confondu avec O à $t = 0$.

3 Il faut 0,87 s au dauphin pour atteindre le sommet S de sa trajectoire. Le saut est-il réellement d'au moins 3 mètres de haut ?

Données utiles $V_0 = 10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $\alpha = 60^\circ$; $g = 10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; $t_S = 0{,}87\ \text{s}$

La hauteur du saut est l'ordonnée du sommet : $y_S = y(t_S) = -\dfrac{1}{2}\,g\,t_S^2 + V_0\sin\alpha\;t_S$

$$y_S = -\frac{1}{2}\times 10\times 0{,}87^2 + 10\times\sin(60^\circ)\times 0{,}87 = 3{,}7\ \text{m}$$

$y_S = 3{,}7\ \text{m} > 3\ \text{m}$: le centre d'inertie du dauphin s'élève bien de plus de 3 mètres.

PIÈGE
Calculatrice en radians : $\sin(60)$ donne alors $-0{,}30$ et une hauteur négative. Vérifier le mode degré.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme V_0, g et t_S. La date 0,87 s se retrouve en écrivant $V_y(t_S) = 0$: $t_S = V_0\sin\alpha/g$.

À LA CALCULATRICE

deg CALCULS

$(-0.5) \times 10 \times 0.87^2 + 10 \times \sin(60°) \times 0.87$

$\approx$ 3.749921

4.1 À partir du document de l'annexe 2, déterminer la valeur de la vitesse du centre d'inertie aux points 4 et 6, notées V_4 et V_6 .

Données utiles échelle du document : 1 cm pour 0,50 m ; $\Delta t = 0{,}10$ s

La vitesse en un point est assimilée à la vitesse moyenne entre les deux positions qui l'encadrent : $V_4 = \dfrac{G_3G_5}{2\,\Delta t}$ et $V_6 = \dfrac{G_5G_7}{2\,\Delta t}$.

Sur le document : $G_3G_5 = 2{,}5$ cm, soit $2{,}5 \times 0{,}50 = 1{,}25$ m en réalité ; $G_5G_7 = 2{,}0$ cm, soit $1{,}0$ m.

$V_4 = \dfrac{1{,}25}{2 \times 0{,}10} = 6{,}3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ $\qquad$ $V_6 = \dfrac{1{,}0}{2 \times 0{,}10} = 5{,}0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

$V_4 \approx 6{,}3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $V_6 \approx 5{,}0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

PIÈGE
Diviser par Δt au lieu de $2\,\Delta t$: entre les positions 3 et 5, il s'écoule deux intervalles de temps. Ne pas oublier non plus de convertir la longueur mesurée avec l'échelle.

COMPRENDRE
Un millimètre d'écart à la règle modifie la vitesse de $0{,}25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$: des valeurs voisines sont acceptées. On mesure le segment droit, pas l'arc de trajectoire.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\dfrac{2.5 \times 0.50}{2 \times 0.10}$

$\approx$ 6.25

$\dfrac{2.0 \times 0.50}{2 \times 0.10}$

$\approx$ 5

4.2 Tracer les vecteurs $\vec{V}_4$ et $\vec{V}_6$ sur le document de l'annexe 2, à l'échelle 1 cm pour $2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Données utiles $V_4 = 6{,}25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $V_6 = 5{,}0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (II.4.1)

Longueurs des flèches : $\dfrac{6{,}25}{2} = 3{,}1$ cm pour $\vec{V}_4$ et $\dfrac{5{,}0}{2} = 2{,}5$ cm pour $\vec{V}_6$.

$\vec{V}_4$ part du point 4, il est tangent à la trajectoire, donc parallèle à la droite (G_3G_5), dans le sens du mouvement. De même, $\vec{V}_6$ part du point 6 et il est parallèle à (G_5G_7).

$\vec{V}_4$: flèche de 3,1 cm au point 4 ; $\vec{V}_6$: flèche de 2,5 cm au point 6 (voir l'annexe complétée).

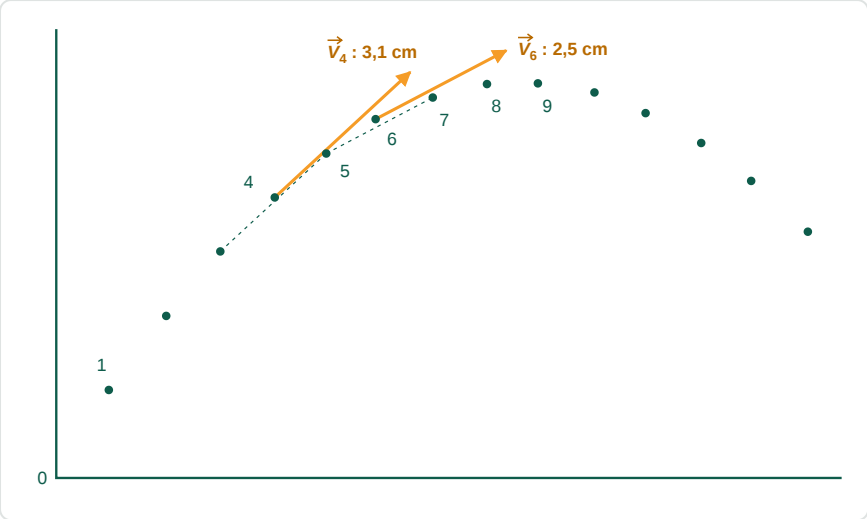
MÉTHODE
Un vecteur vitesse se trace avec trois informations : son origine (le point), sa direction et son sens (la tangente, dans le sens du parcours), sa longueur (valeur divisée par l'échelle).

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\dfrac{6.25}{2}$

$\approx$ 3.125



4.2 · Annexe 2 complétée : vecteurs vitesse aux points 4 et 6 (échelle : 1 cm pour 2 m·s^{-1} ; longueurs à tracer sur le document)

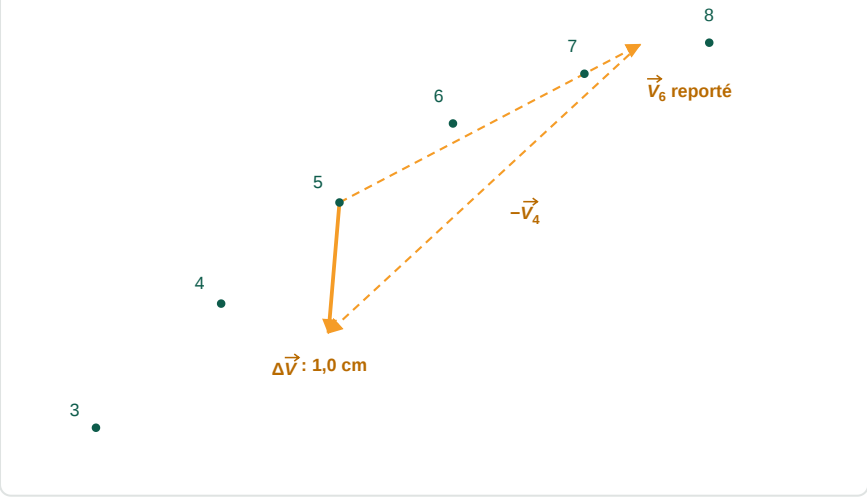
4.3 Construire sur l'annexe 2 le vecteur $\Delta\vec{V} = \vec{V}_6 - \vec{V}_4$ au point 5 et déterminer sa valeur en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ avec l'échelle précédente.

On écrit $\Delta\vec{V} = \vec{V}_6 + (-\vec{V}_4)$. À partir du point 5, on reporte $\vec{V}_6$; à l'extrémité de ce vecteur, on place $-\vec{V}_4$ (même direction et même longueur que $\vec{V}_4$, sens opposé). $\Delta\vec{V}$ relie le point 5 à l'extrémité de $-\vec{V}_4$.

Le vecteur obtenu est vertical, dirigé vers le bas, et mesure $1{,}0$ cm. Avec l'échelle 1 cm pour $2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$:

$$\Delta V = 1{,}0 \times 2 = 2{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

PIÈGE
Calculer $V_6 - V_4 = 5{,}0 - 6{,}3$: une différence de vecteurs n'est pas une différence de valeurs. Seule la construction graphique donne ΔV.



4.3 · Annexe 2 complétée : construction de $\Delta\vec{V}$ au point 5 (zoom sur les positions 3 à 8)

4.4 En déduire la valeur a_5 du vecteur accélération $\vec{a}_5$ au point 5. Le représenter sur l'annexe 2 à l'échelle 1 cm pour $2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Données utiles $\Delta V = 2{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ (II.4.3) ; $\Delta t = 0{,}10\ \text{s}$

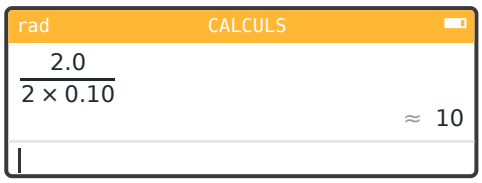
Entre les points 4 et 6, il s'écoule $2\,\Delta t$: $\vec{a}_5 = \dfrac{\Delta \vec{V}}{2\,\Delta t}$, donc

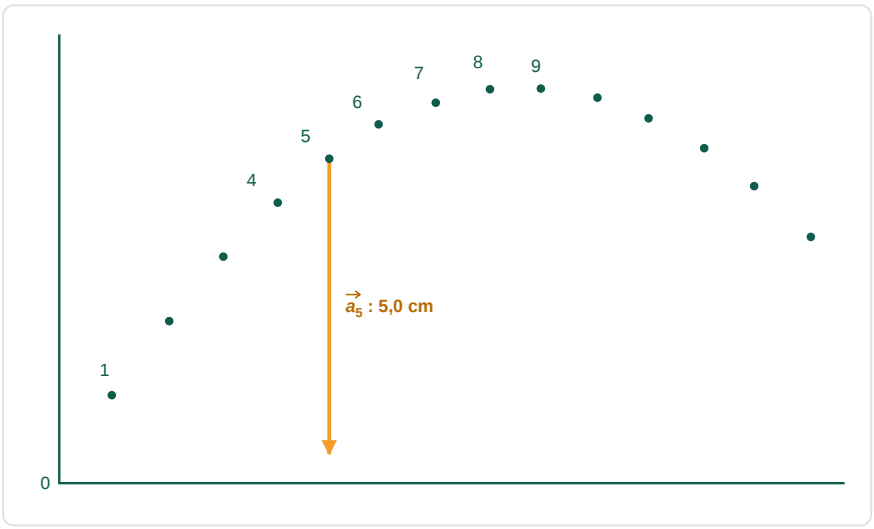
$$a_5 = \frac{\Delta V}{2\,\Delta t} = \frac{2{,}0}{2 \times 0{,}10} = 10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

$\vec{a}_5$ a la direction et le sens de $\Delta \vec{V}$: vertical, vers le bas. Sa longueur sur le document est $\dfrac{10}{2} = 5{,}0$ cm, à partir du point 5.

$a_5 = 10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, représenté par une flèche verticale de 5,0 cm dirigée vers le bas.

À LA CALCULATRICE





4.4 · Annexe 2 complétée : vecteur accélération au point 5 (échelle : 1 cm pour 2 m·s⁻²)

4.5 Les résultats de la question II.4.4 sont-ils en accord avec ceux de la question II.1 ?

D'après II.1, $\vec{a}_G = \vec{g}$: le vecteur accélération est vertical, dirigé vers le bas, de valeur $g = 10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Le vecteur $\vec{a}_5$ construit en II.4.4 est lui aussi vertical, dirigé vers le bas, et sa valeur est $a_5 = 10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

$\vec{a}_5 = \vec{g}$: même direction, même sens, même valeur. Les résultats sont en accord.

MÉTHODE
Comparer deux vecteurs, c'est comparer trois caractéristiques : direction, sens et valeur. Citer seulement la valeur ne suffit pas.

5 Exprimer l'énergie cinétique $E_C(G)$ du dauphin en fonction de m, V_x et V_y.

$E_C(G) = \dfrac{1}{2}\,m\,V^2$ et, dans le repère orthonormé, $V^2 = V_x^2 + V_y^2$.

$$E_C(G) = \frac{1}{2}\,m\,\left(V_x^2 + V_y^2\right)$$

PIÈGE
Écrire $V = V_x + V_y$: les coordonnées ne s'ajoutent pas, c'est le théorème de Pythagore qui donne V^2.

6 Exprimer l'énergie potentielle de pesanteur $E_P(G)$ du dauphin en fonction de y, m et g, en la choisissant nulle pour $y = 0$.

L'axe Oy est vertical et orienté vers le haut, et l'origine de l'énergie potentielle est prise en $y = 0$:

$$E_P(G) = m\,g\,y$$

7 Montrer que l'énergie mécanique du dauphin a pour valeur $9{,}0 \times 10^3$ J à la date $t = 0$.

Données utiles $m = 180$ kg ; $V_0 = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

$$E_m = E_C(G) + E_P(G) = \frac{1}{2} m V^2 + m g y$$

À $t = 0$, G est en O : $y = 0$ donc $E_P = 0$, et $V = V_0$.

$$E_m(0) = \frac{1}{2} m V_0^2 = \frac{1}{2} \times 180 \times 10^2 = 9{,}0 \times 10^3 \text{ J}$$

$E_m(0) = 9{,}0 \times 10^3$ J : c'est la valeur attendue.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$0.5 \times 180 \times 10^2$

$\approx$ 9000

8 Par une étude énergétique, retrouver l'ordonnée y_S du sommet S de la trajectoire.

Données utiles $E_m(0) = \frac{1}{2} m V_0^2$ (II.7) ; $V_x = V_0 \cos\alpha$ (II.2.1) ; $\alpha = 60^\circ$; $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

Hors de l'eau, la seule force exercée est le poids, qui est une force conservative : l'énergie mécanique se conserve, $E_m(S) = E_m(0)$.

Au sommet S, $V_y = 0$ et $V_x = V_0 \cos\alpha$:

$$\frac{1}{2} m V_0^2 \cos^2\alpha + m g y_S = \frac{1}{2} m V_0^2$$

$$y_S = \frac{V_0^2 (1 - \cos^2\alpha)}{2g} = \frac{10^2 \times (1 - \cos^2(60^\circ))}{2 \times 10} = 3{,}75 \text{ m}$$

$y_S \approx 3{,}8$ m, en accord avec la valeur trouvée en II.3 (3,7 m).

PIÈGE

Écrire $E_C = 0$ au sommet. Le dauphin y avance encore horizontalement : seule V_y s'annule, et $V_x = V_0 \cos\alpha = 5{,}0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

COMPRENDRE

Le calcul exact donne 3,75 m. En II.3, la date 0,87 s est déjà arrondie, d'où 3,7 m : les deux méthodes s'accordent à l'arrondi près. La masse se simplifie.

À LA CALCULATRICE

deg CALCULS

$\frac{10^2 \times \left(1 - \cos(60^\circ)^2\right)}{2 \times 10}$

$\approx$ 3.75