Pendule de Foucault

Bac S 2011 Métropole rattrapage (ancien programme) · Exercice 4 **5,5 points** **Durée conseillée 1 h 05**

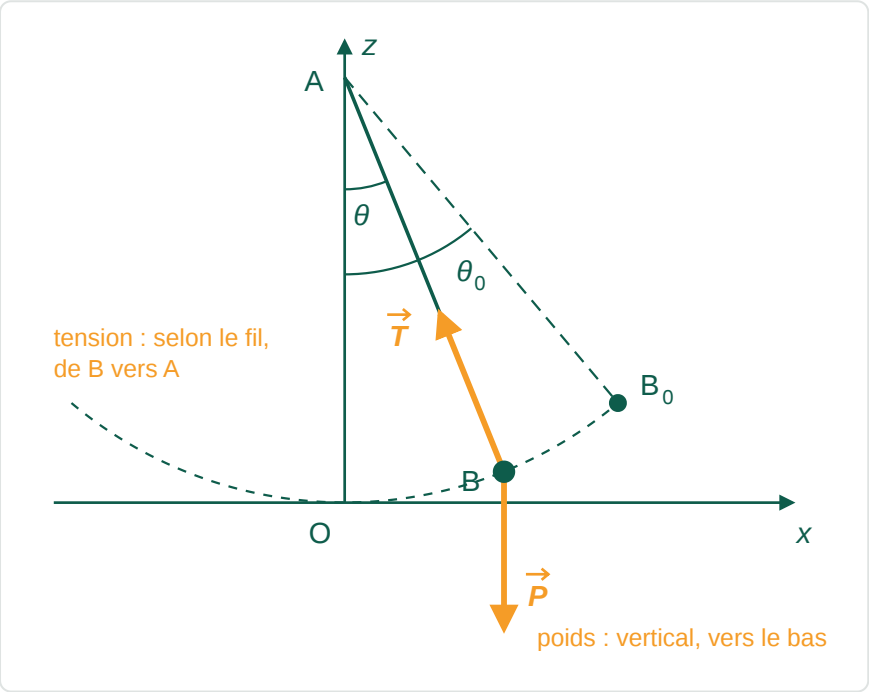
1.1.1 Sur la figure A3 de l'annexe, représenter sans souci d'échelle les forces qui s'exercent sur la sphère B pour un angle θ quelconque (actions de l'air négligées).

Système {sphère B}, étudié dans le référentiel terrestre. Sans l'air, deux forces s'exercent sur la sphère :

- son poids $\vec{P}$, vertical, dirigé vers le bas ;
- la tension du fil $\vec{T}$, portée par le fil, dirigée de B vers A.

Deux forces, tracées à partir de B : le poids $\vec{P}$ et la tension du fil $\vec{T}$ (voir la figure A3 complétée).

PIÈGE
Ne pas ajouter une « force du mouvement » tangente à la trajectoire : seuls la Terre et le fil agissent sur la sphère. La tension suit le fil, elle n'est pas verticale.



1.1.1 · Figure A3 complétée : les deux forces qui s'exercent sur la sphère B

1.1.2 a. Énoncer la deuxième loi de Newton sous la forme d'une phrase. b. Quels éléments permettent de justifier que le mouvement est plan ?

a. Dans un référentiel galiléen, la somme vectorielle des forces extérieures appliquées à un système de masse m constante est égale au produit de sa masse par le vecteur accélération de son centre d'inertie : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\,\vec{a}$.

b. Ici, $\vec{P} + \vec{T} = m\,\vec{a}$.

- Le poids est vertical et la tension est portée par le fil : tant que B est dans le plan (xOz), ces deux forces sont dans ce plan, donc $\vec{a}$ aussi : $a_y = 0$.
- La sphère est lâchée sans vitesse initiale : $v_y(0) = 0$, donc v_y reste nulle.
- La position initiale B_0 est dans le plan : $y(0) = 0$, donc y reste nulle.

À chaque instant $y(t) = 0$: le mouvement se fait dans le plan (xOz), car les forces sont dans ce plan et la vitesse initiale est nulle.

PIÈGE
Citer seulement les forces ne suffit pas. Avec une vitesse initiale ayant une composante selon (Oy), le pendule sortirait du plan : la condition « lâché sans vitesse initiale » fait partie de la justification.

1.1.3 Parmi les trois expressions proposées pour $x(t)$, choisir celle qui vérifie les conditions initiales (pendule lâché sans vitesse initiale à $t = 0$ depuis la position de la figure A3).

Conditions initiales : sur la figure A3, B_0 est du côté des x positifs, donc $x(0) > 0$; le pendule est lâché sans vitesse, donc $v_x(0) = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0$.

- (a) : $x(0) = K \sin 0 = 0$. Ne convient pas.
- (b) : $x(0) = -K \cos 0 = -K < 0$. Ne convient pas.
- (c) : $x(0) = K \cos 0 = K > 0$ et $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -K\,\dfrac{2\pi}{T_0}\,\sin\left(\dfrac{2\pi}{T_0}\,t\right)$, qui vaut 0 à $t = 0$.

L'expression (c) convient : $x(t) = K \cos\left(\dfrac{2\pi}{T_0}\,t\right)$

COMPRENDRE
La constante K est l'amplitude du mouvement : $K = x(0) = L \sin\theta_0$.

MÉTHODE
Pour choisir entre plusieurs solutions, tester deux conditions à $t = 0$: la position, puis la vitesse (dérivée). Un cosinus part d'un extremum avec une vitesse nulle, un sinus part de zéro avec une vitesse maximale.

1.2.1 Vérifier par analyse dimensionnelle l'homogénéité de l'expression $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$.

L est une longueur : $[L] = \mathrm{L}$.

g s'exprime en $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$, c'est une accélération : $[g] = \mathrm{L \cdot T^{-2}}$.

2π est un nombre sans dimension. Donc :

$$\left[2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\right] = \left(\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{L \cdot T^{-2}}}\right)^{1/2} = \left(\mathrm{T^2}\right)^{1/2} = \mathrm{T}$$

$\sqrt{\dfrac{L}{g}}$ a la dimension d'un temps, comme T_0 : l'expression est homogène.

MÉTHODE
Remplacer chaque grandeur par sa dimension (L, T, M), simplifier, puis comparer les deux membres. L'unité donnée par l'énoncé ($\mathrm{m \cdot s^{-2}}$ pour g) fournit directement la dimension.

1.2.2 a. Calculer la période propre du balancier ($L = 1{,}0$ m) d'une horloge située à Paris. b. Pourquoi dit-on que cette horloge « bat la seconde » ? c. Que penser de ses indications dans un lieu de latitude différente ?

Données utiles $L = 1{,}0$ m ; $g_{\text{Paris}} = 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

a. $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g_{\text{Paris}}}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{1{,}0}{9{,}8}} = 2{,}0$ s

b. Une oscillation complète (un aller-retour) dure $2{,}0$ s, donc un aller simple dure $\dfrac{T_0}{2} = 1{,}0$ s. Le balancier passe par sa position d'équilibre une fois par seconde : chaque battement marque une seconde.

c. La valeur de g dépend de la latitude. Ailleurs qu'à Paris, $g \neq g_{\text{Paris}}$, donc $T_0 \neq 2{,}0$ s : l'horloge ne bat plus exactement la seconde, elle avance ou retarde. Il faut ajuster la longueur du balancier pour la régler.

$T_0 = 2{,}0$ s à Paris ; une demi-oscillation dure $1{,}0$ s ; l'horloge se dérègle si la latitude change.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme L et g_{Paris} : on écrit $2{,}0$ s et non 2 s ou $2{,}007$ s.

COMPRENDRE
Si g diminue, T_0 augmente : chaque battement dure plus d'une seconde et l'horloge retarde. Si g augmente, elle avance.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS
$2 \times \pi \times \sqrt{\dfrac{1.0}{9.8}}$
$\approx$ 2.00709

2.1.1 Déterminer graphiquement la valeur de la pseudo-période T des oscillations à 0,1 seconde près.

Sur la figure 3, on mesure la durée de plusieurs oscillations pour gagner en précision. Le premier maximum est à $t = 0$; le onzième maximum, dix pseudo-périodes plus tard, est à $t = 164$ s.

$10\,T = 164$ s, donc $T = \dfrac{164}{10}$

$T = 16{,}4$ s

PIÈGE
Bien compter les intervalles et non les sommets : entre le premier et le onzième maximum, il y a dix pseudo-périodes.

MÉTHODE
Mesurer $10\,T$ divise par dix l'incertitude de lecture : une erreur de 1 s sur 164 s ne donne que 0,1 s sur T. Lire une seule période sur le graphe ne permet pas la précision demandée.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS
$\dfrac{164}{10}$
$\approx$ 16.4

2.1.2 À partir de la valeur de la pseudo-période, retrouver la longueur du pendule de Foucault décrit dans le texte d'introduction.

Données utiles $T = 16{,}4$ s (2.1.1) ; $g_{\text{Paris}} = 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; longueur annoncée : 67 m

L'amortissement est faible : $T \approx T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g_{\text{Paris}}}}$.

En élevant au carré : $T^2 = 4\pi^2\,\dfrac{L}{g_{\text{Paris}}}$, d'où $L = \dfrac{T^2\,g_{\text{Paris}}}{4\pi^2}$.

$$L = \frac{16{,}4^2 \times 9{,}8}{4\pi^2} = 67\ \text{m}$$

$L = 67$ m : on retrouve la longueur du fil annoncée dans le texte (67 m).

PIÈGE
Isoler L avant de calculer et ne pas oublier le carré sur T et sur π. Un résultat de quelques mètres ou de plusieurs kilomètres doit alerter.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS
$\dfrac{16.4^2 \times 9.8}{4 \times \pi^2}$
$\approx$ 66.7658

2.2.1 Quelle est l'origine de l'amortissement constaté dans les oscillations ?

Sur la figure 3, l'amplitude diminue légèrement au cours du temps. La sphère se déplace dans l'air, qui exerce sur elle des forces de frottement.

L'amortissement est dû aux frottements, principalement ceux de l'air sur la sphère et le fil.

2.2.2 Préciser la nature des conversions d'énergie mises en jeu lors des oscillations du pendule.

- Quand la sphère descend vers sa position d'équilibre, son énergie potentielle de pesanteur est convertie en énergie cinétique.
- Quand elle remonte, son énergie cinétique est convertie en énergie potentielle de pesanteur.
- À chaque oscillation, une petite partie de l'énergie mécanique est dissipée par les frottements, sous forme de transfert thermique vers l'air.

Échanges permanents entre énergie potentielle de pesanteur et énergie cinétique, avec une faible dissipation due aux frottements.

COMPRENDRE
Aux positions extrêmes, la vitesse est nulle : l'énergie est entièrement potentielle. Au passage par la verticale, l'altitude est minimale et la vitesse maximale : l'énergie cinétique est maximale.

2.2.3 Comment évolue l'énergie mécanique du pendule au cours du temps ?

L'énergie mécanique est $E_m = E_c + E_{pp}$. Les forces de frottement ne sont pas conservatives et leur travail est négatif (résistant).

L'énergie mécanique du pendule diminue lentement au cours du temps.

COMPRENDRE
Cette diminution se lit sur la figure 3 : les maximums de x baissent un peu. Or, à un maximum, toute l'énergie est potentielle et elle est d'autant plus petite que la sphère monte moins haut.

2.3.1 Le mouvement observé n'est pas plan, en désaccord avec l'application de la deuxième loi de Newton faite en 1.1.2. Que peut-on en conclure quant au référentiel terrestre ?

En 1.1.2, la deuxième loi de Newton a été appliquée en supposant le référentiel terrestre galiléen ; elle prévoit un mouvement plan. L'observation sur plusieurs heures contredit cette prévision, alors que les forces sont les mêmes. C'est donc l'hypothèse faite sur le référentiel qui n'est pas valable.

Le référentiel terrestre n'est pas rigoureusement galiléen : il ne peut être considéré comme tel que pour des durées courtes devant la période de rotation de la Terre.

COMPRENDRE
La Terre tourne sur elle-même par rapport au référentiel géocentrique. Sur quelques minutes (2.1), cette rotation est négligeable ; sur plusieurs heures, elle ne l'est plus. C'est ce que Foucault a mis en évidence en 1851.

2.3.2 Calculer, pour le pendule du Panthéon, la période τ de rotation du plan d'oscillation. Compléter la case vide du tableau de la figure A4.

Données utiles le plan tourne de 270° en 24 h, à vitesse constante

La période τ est la durée d'un tour complet (360°) du plan d'oscillation. La rotation se fait à vitesse constante, donc la durée est proportionnelle à l'angle :

$$\tau = \frac{360}{270} \times 24 = 32 \text{ h}$$

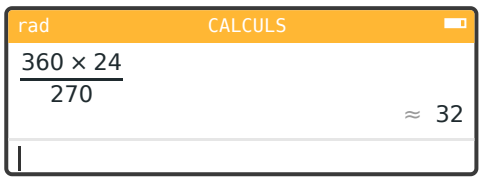
Dans le tableau de la figure A4, ligne « Paris » ($\lambda = 48{,}85^\circ$), on écrit : 32 h 00 min.

$\tau = 32$ h

PIÈGE

Ne pas répondre $\tau = 24$ h : en un jour, le plan ne fait que les trois quarts d'un tour. La période est donc plus longue qu'un jour.

À LA CALCULATRICE



2.3.3 Reporter le point correspondant sur le graphe $\tau = f\left(\frac{1}{|\sin\lambda|}\right)$ de la figure A5. En déduire une méthode pour déterminer, à l'aide d'un pendule de Foucault, la latitude d'un lieu.

Données utiles Paris : $\lambda = 48{,}85^\circ$; $\tau = 32$ h (2.3.2)

Abscisse du point de Paris : $\frac{1}{|\sin\lambda|} = \frac{1}{\sin(48{,}85^\circ)} = 1{,}33$; ordonnée : $\tau = 32$ h.

Ce point s'aligne avec les quatre autres sur une droite passant par l'origine : τ est proportionnelle à $\frac{1}{|\sin\lambda|}$.

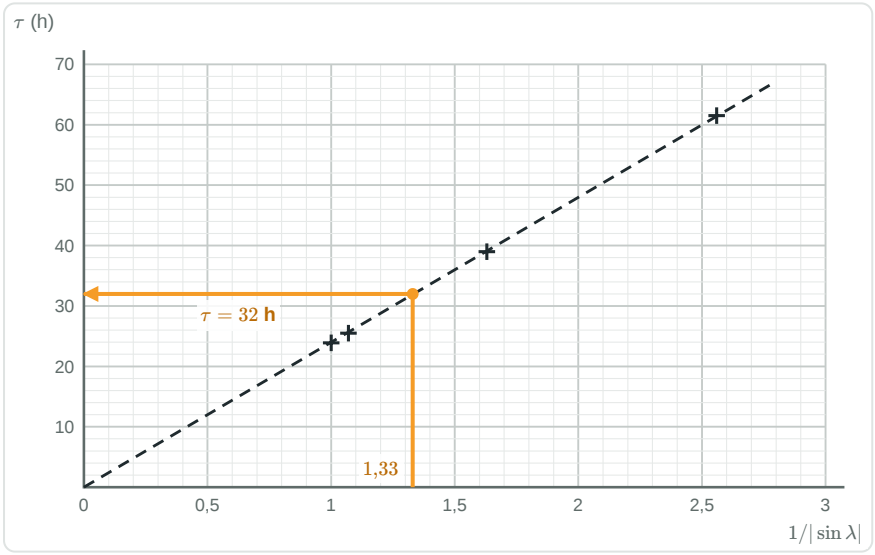
Méthode :

- installer un pendule de Foucault au lieu étudié et mesurer la période τ de rotation de son plan d'oscillation (par exemple l'angle balayé en quelques heures, puis une proportionnalité) ;
- placer τ en ordonnée sur la droite d'étalonnage et lire l'abscisse $\frac{1}{|\sin\lambda|}$;
- en déduire $|\sin\lambda|$, puis la latitude avec la touche $\arcsin$.

Point à placer : $(1{,}33\ ;\ 32\ \text{h})$. La mesure de τ, reportée sur la droite, donne $\frac{1}{|\sin\lambda|}$ donc la latitude.

COMPRENDRE
La droite a pour coefficient directeur environ 24 h, soit T_{Terre} : $\tau \approx \frac{T_{\text{Terre}}}{|\sin\lambda|}$. Vérification pour Paris : $\sin\lambda = \frac{24}{32} = 0{,}75$ donne $\lambda \approx 49^\circ$.

COMPRENDRE
La valeur absolue fait perdre le signe de λ : le graphe ne dit pas si le lieu est dans l'hémisphère nord ou sud. Près de l'équateur, τ devient très grande (6329 h à Quito) et la méthode est inutilisable.



2.3.3 · Figure A5 complétée : le point de Paris (en orange) s'aligne avec les autres

À LA CALCULATRICE

