Chute d'une goutte de pluie

Bac S 2010 Asie (ancien programme) · Exercice 2 **5,5 points** **Durée conseillée 1 h 05**

1.1 Donner l'expression littérale de la valeur F_A de la poussée d'Archimède qui agit sur la goutte.

La poussée d'Archimède a pour valeur le poids du volume d'air dont la goutte prend la place :

$$F_A = \rho_2 \, V \, g$$

PIÈGE
Écrire ρ_1 à la place de ρ_2. La masse volumique qui intervient est celle du fluide déplacé (l'air), pas celle de l'objet immergé (l'eau).

1.1.2 Établir l'expression du rapport $\dfrac{P}{F_A}$ en fonction des masses volumiques ρ_1 et ρ_2.

Données utiles $F_A = \rho_2 \, V \, g$ (1.1)

Masse de la goutte : $m = \rho_1 \, V$, donc $P = m \, g = \rho_1 \, V \, g$.

$$\frac{P}{F_A} = \frac{\rho_1 \, V \, g}{\rho_2 \, V \, g}$$

$$\frac{P}{F_A} = \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

1.1.3 À l'aide des données numériques, montrer que F_A est négligeable devant P.

Données utiles $\rho_1 = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$; $\rho_2 = 1{,}3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$; $\dfrac{1}{1{,}3} = 0{,}77$

$$\frac{P}{F_A} = \frac{1000}{1{,}3} = 1000 \times 0{,}77 = 7{,}7 \times 10^2$$

$P \approx 770 \, F_A$: la poussée d'Archimède est négligeable devant le poids.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme ρ_2, la donnée la moins précise. Le rapport ne dépend ni de la taille de la goutte ni de g : seul compte le rapport des masses volumiques.

MÉTHODE
Sans calculatrice, repérer l'aide de calcul fournie : ici $\dfrac{1}{1{,}3}$ est donné, il reste à multiplier par 1000.

1.2.1 L'axe vertical étant orienté vers le bas, montrer que l'équation différentielle du mouvement s'écrit $\dfrac{\mathrm{d}v_G}{\mathrm{d}t} = A \, v_G + B$ et exprimer A et B en fonction de K, m et g.

Système {goutte}, de masse m constante ; référentiel terrestre supposé galiléen.

Forces : le poids $\vec{P} = m \, \vec{g}$, vertical vers le bas ; le frottement $\vec{f} = -K \, \vec{v}_G$, opposé à la vitesse (poussée d'Archimède négligée).

Deuxième loi de Newton : $\vec{P} + \vec{f} = m \, \vec{a}_G$.

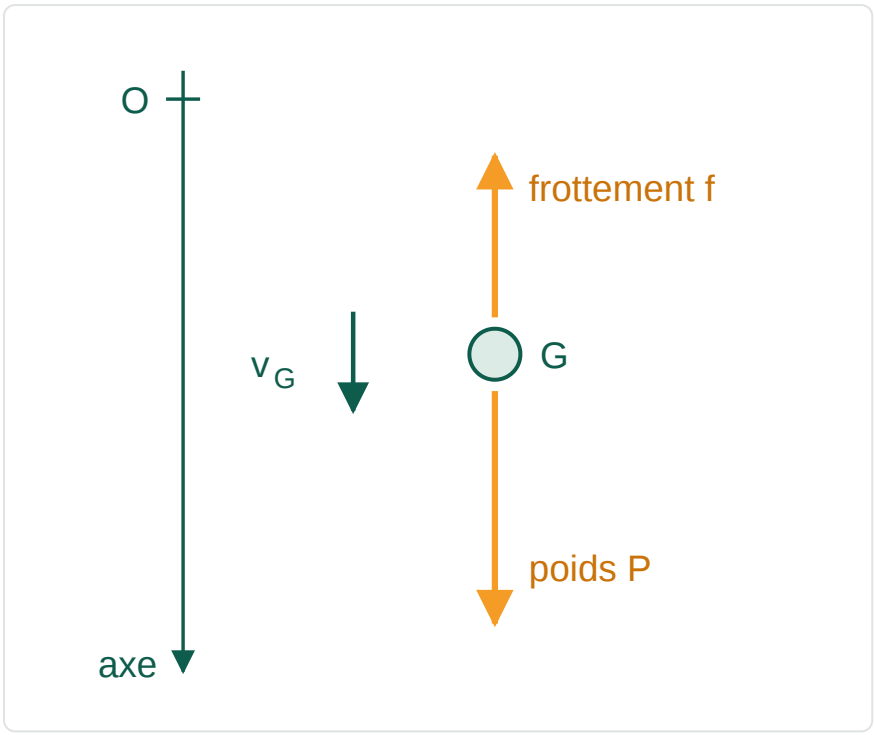
Projection sur l'axe vertical descendant, avec $a_G = \dfrac{\mathrm{d}v_G}{\mathrm{d}t}$:

$$m \, g - K \, v_G = m \, \frac{\mathrm{d}v_G}{\mathrm{d}t} \quad \text{soit} \quad \frac{\mathrm{d}v_G}{\mathrm{d}t} = -\frac{K}{m} \, v_G + g$$

$$A = -\frac{K}{m} \text{ et } B = g$$

PIÈGE
Oublier le signe « $-$ » de A. L'axe pointe vers le bas : le poids se projette en $+mg$, le frottement, dirigé vers le haut, en $-K \, v_G$.

MÉTHODE
Toujours dans cet ordre : système, référentiel, bilan des forces, deuxième loi de Newton en vecteurs, puis projection sur l'axe imposé par le sujet.



1.2.1 · Forces sur la goutte pendant la chute (poussée d'Archimède négligée), axe orienté vers le bas

1.2.2 Donner les unités de A et de B dans le système international.

$B = g$ est une accélération : B s'exprime en $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

Dans une somme, tous les termes ont la même unité : $A\,v_G$ est aussi en $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$. Comme v_G est en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, A est en $\dfrac{\mathrm{m \cdot s^{-2}}}{\mathrm{m \cdot s^{-1}}} = \mathrm{s^{-1}}$.

A en $\mathrm{s^{-1}}$; B en $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$

COMPRENDRE
$-\dfrac{1}{A} = \dfrac{m}{K}$ est donc une durée : c'est le temps caractéristique de la chute, ici $\dfrac{1}{0{,}324} \approx 3$ s.

1.3.1 À l'aide de l'équation différentielle et du tableau, calculer la valeur de l'accélération à la date $t = 3{,}4$ s.

Données utiles $A = -3{,}24 \times 10^{-1}\ \mathrm{s^{-1}}$; $B = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$; $v_G(3{,}4) = 21{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$; $3{,}24 \times 2{,}10 = 6{,}80$

$$a_G(3{,}4) = \frac{\mathrm{d}v_G}{\mathrm{d}t}(3{,}4) = A\,v_G(3{,}4) + B$$

$$a_G(3{,}4) = -3{,}24 \times 10^{-1} \times 21{,}0 + 10 = -3{,}24 \times 2{,}10 + 10 = -6{,}80 + 10$$

$a_G(3{,}4) = 3{,}2\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$

MÉTHODE
Faire apparaître l'aide de calcul : $3{,}24 \times 10^{-1} \times 21{,}0$ se réécrit $3{,}24 \times 2{,}10$, produit donné dans l'énoncé.

1.3.2 En déduire, par la méthode d'Euler, la valeur de la vitesse à la date $t = 3{,}6$ s.

Données utiles $v_G(3{,}4) = 21{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$; $a_G(3{,}4) = 3{,}2\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$ (1.3.1)

Pas d'itération, lu dans le tableau : $\Delta t = 3{,}2 - 3{,}0 = 0{,}2$ s.

$$v_G(3{,}6) = v_G(3{,}4) + \frac{\mathrm{d}v_G}{\mathrm{d}t}(3{,}4) \times \Delta t$$

$$v_G(3{,}6) = 21{,}0 + 3{,}2 \times 0{,}2 = 21{,}0 + 0{,}64$$

$v_G(3{,}6) = 21{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

PIÈGE
Le pas n'est pas donné : il se lit dans la colonne des dates. Le résultat s'arrondit au dixième, comme les autres vitesses du tableau.

1.3.3 Comment choisir le pas de calcul pour que les valeurs obtenues par la méthode d'Euler soient les plus proches possible des valeurs réelles ?

La méthode suppose l'accélération constante pendant chaque intervalle Δt, ce qui est d'autant moins faux que l'intervalle est court.

Il faut choisir le pas Δt le plus petit possible.

COMPRENDRE
En contrepartie, un pas plus petit demande davantage de lignes de calcul pour couvrir la même durée de chute.

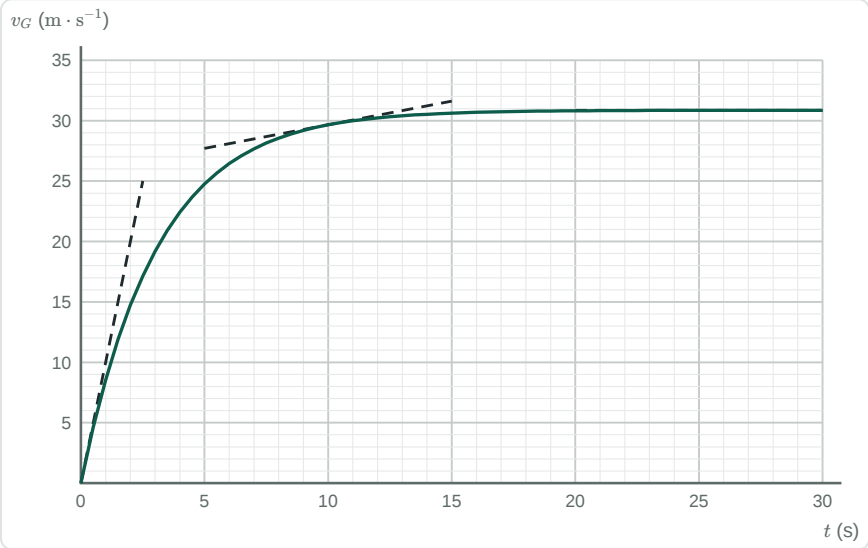
1.4.1 Comment évolue l'accélération de la goutte d'eau ? Justifier.

$a_G = \dfrac{\mathrm{d}v_G}{\mathrm{d}t}$: à chaque date, l'accélération est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $v_G(t)$.

Cette tangente est très inclinée à $t = 0$, puis de moins en moins, jusqu'à devenir horizontale.

L'accélération diminue au cours du temps, puis s'annule.

COMPRENDRE
La vitesse augmente alors que l'accélération diminue : ce n'est pas contradictoire. Tant que a_G est positive, la goutte gagne de la vitesse, mais de moins en moins vite.



1.4.1 · Courbe du sujet : la tangente (en tirets) est de moins en moins inclinée

1.4.2 Donner la valeur de l'accélération lorsque le régime permanent est atteint, puis comparer les valeurs des forces qui agissent alors sur la goutte.

En régime permanent, la vitesse est constante : $a_G = \dfrac{\mathrm{d}v_G}{\mathrm{d}t} = 0$.

La deuxième loi de Newton donne alors $\vec{P} + \vec{f} = \vec{0}$: les deux forces sont opposées, elles se compensent.

$a_G = 0\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$ et $f = P$: le frottement a la même valeur que le poids.

PIÈGE
Dire que « plus aucune force n'agit ». Les deux forces existent toujours ; c'est leur somme vectorielle qui est nulle, et le mouvement est rectiligne uniforme.

1.4.3 Établir l'expression littérale de la vitesse limite atteinte par la goutte d'eau.

En régime permanent, $v_G = v_{\mathrm{lim}}$ et $f = P$, soit $K\, v_{\mathrm{lim}} = m\, g$.

$$v_{\mathrm{lim}} = \frac{m\, g}{K}$$

COMPRENDRE
Même résultat avec l'équation différentielle : $0 = A\, v_{\mathrm{lim}} + B$ donne $v_{\mathrm{lim}} = -\dfrac{B}{A} = \dfrac{10}{0{,}324} \approx 31\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, en accord avec le palier de la courbe.

2.1 À partir de la deuxième loi de Newton, établir les équations horaires du mouvement de la goutte dans le repère (Oxy), l'axe (Ox) étant horizontal dans le sens de $\vec{v}_2$ et l'axe (Oy) vertical descendant.

Système {goutte} ; référentiel terrestre supposé galiléen ; seule force : le poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$.

Deuxième loi de Newton : $m\,\vec{g} = m\,\vec{a}_G$, donc $\vec{a}_G = \vec{g}$, soit $a_x = 0$ et $a_y = g$ (axe (Oy) vers le bas).

On intègre une première fois, avec à $t = 0$: $v_x(0) = v_2$ et $v_y(0) = v$.

$$v_x = v_2 \qquad v_y = g\,t + v$$

On intègre une seconde fois, avec à $t = 0$: $x(0) = 0$ et $y(0) = 0$.

$$x(t) = v_2\,t \text{ et } y(t) = \frac{1}{2}\,g\,t^2 + v\,t$$

PIÈGE
Écrire $a_y = -g$ par habitude. Ici l'axe (Oy) descend : $a_y = +g$, et la vitesse verticale initiale v est positive elle aussi.

MÉTHODE
Chaque intégration ajoute une constante, fixée par la condition initiale : le vecteur $\vec{v}_0$ pour la vitesse, la position de départ pour les coordonnées.

2.2 Donner l'équation de la trajectoire de la goutte dans le repère (Oxy) et préciser sa nature.

Données utiles $x(t) = v_2\,t$; $y(t) = \frac{1}{2}\,g\,t^2 + v\,t$ (2.1)

On élimine le temps : $t = \dfrac{x}{v_2}$, que l'on reporte dans $y(t)$.

$$y = \frac{1}{2}\,g\left(\frac{x}{v_2}\right)^2 + v\,\frac{x}{v_2}$$

$$y = \frac{g}{2\,v_2^2}\,x^2 + \frac{v}{v_2}\,x$$: la trajectoire est une portion de parabole.

COMPRENDRE
y est un polynôme du second degré en x. L'axe (Oy) étant descendant, la goutte s'incurve vers le bas tout en avançant dans le sens du vent.