Corrigé complet — Bac S 2009 Liban (ancien programme)

Physique-chimie, enseignement de spécialité **20 points** **3 h 30**

Ex 1	**De l'importance de l'eau oxygénée** Électrolyse · Quantité d'électricité · Tableau d'avancement · Loi des gaz parfaits · Temps de demi-réaction · Facteurs cinétiques et catalyse	7 pts	1 h 31	15 questions	p. 2
Ex 2	**L'oscillateur élastique horizontal** Oscillateur élastique horizontal · Pseudo-période et période propre · Énergie potentielle élastique · Énergie mécanique et frottements · Deuxième loi de Newton · Équation différentielle du mouvement	4 pts	52 min	8 questions	p. 7
Ex 3	**Le cercle des planètes disparues** Troisième loi de Kepler · Deuxième loi de Newton · Interaction gravitationnelle · Mouvement circulaire uniforme · Période de révolution · Masse de l'astre attracteur	5 pts	1 h 05	8 questions	p. 11
Ex 4	**Spécialité : La radio B.L.U.** Modulation d'amplitude · Porteuse et signal modulant · Taux de modulation · Spectre en fréquence · Filtre passe-bande · Analyse dimensionnelle	4 pts	52 min	12 questions	p. 14

Comment s'en servir. Fais d'abord le sujet en temps limité, puis corrige-toi exercice par exercice. À gauche de chaque question, sur les carreaux : ce qu'il faut écrire sur ta copie. À droite : les pièges, ce qu'il faut comprendre et les méthodes.

De l'importance de l'eau oxygénée

Bac S 2009 Liban (ancien programme) · Exercice 1 **7 points** **Durée conseillée 1 h 31**

1.1 Identifier l'anode et la cathode sur le schéma de l'annexe et indiquer le sens de déplacement des différents porteurs de charge.

L'électrode de titane, reliée à la borne $+$ du générateur, est l'**anode** (oxydation). L'électrode de nickel, reliée à la borne $-$, est la **cathode** (réduction).

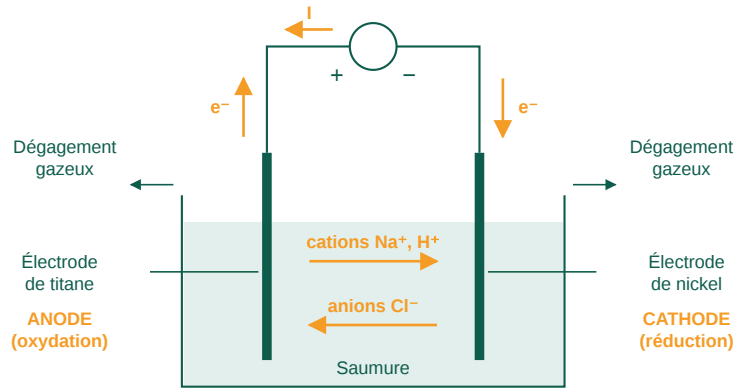
Dans les fils, les électrons sortent de la borne $-$ du générateur, vont vers la cathode, et repartent de l'anode vers la borne $+$ (sens opposé à celui du courant I).

Dans la saumure, les cations (Na^+, H^+) migrent vers la cathode et les anions (Cl^-) vers l'anode.

Anode : électrode de titane (borne $+$) ; cathode : électrode de nickel (borne $-$).

PIÈGE
Dans un électrolyseur, l'anode est reliée à la borne $+$ du générateur : c'est l'inverse d'une pile, où l'anode est le pôle négatif. Seule la définition ne change pas : anode = oxydation.

MÉTHODE
Partir du générateur, qui impose le sens du courant : I sort de la borne $+$. Les électrons vont en sens inverse dans les fils ; en solution, les cations suivent le courant et les anions le remontent.



1.1 · Annexe complétée (en orange, ce que l'élève ajoute)

1.2 Du dichlore se dégage à l'anode et du dihydrogène à la cathode. Écrire les demi-équations des réactions aux électrodes.

Données utiles couples $Cl_2(g)/Cl^-(aq)$ et $H^+(aq)/H_2(g)$

À l'anode, oxydation des ions chlorure : $2\,Cl^-(aq) = Cl_2(g) + 2\,e^-$

À la cathode, réduction des ions hydrogène : $2\,H^+(aq) + 2\,e^- = H_2(g)$

Anode : $2\,Cl^-(aq) = Cl_2(g) + 2\,e^-$; cathode : $2\,H^+(aq) + 2\,e^- = H_2(g)$

PIÈGE
Les électrons sont du côté des produits pour une oxydation (anode) et du côté des réactifs pour une réduction (cathode). Vérifier la conservation des éléments et de la charge de chaque côté.

1.3 Montrer que, pour une intensité I et une durée Δt données, le volume de dihydrogène produit à la cathode s'écrit $V_{H_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{I\,\Delta t\,V_m}{N_A\,e}$.

Charge électrique qui a circulé pendant Δt : $Q = I\,\Delta t$.

Cette charge est transportée par $n(e^-)$ moles d'électrons, chacun de charge e en valeur absolue : $Q = n(e^-)\,N_A\,e$, donc $n(e^-) = \dfrac{I\,\Delta t}{N_A\,e}$.

D'après la demi-équation à la cathode, il faut 2 moles d'électrons pour former 1 mole de dihydrogène : $n(H_2) = \dfrac{n(e^-)}{2}$.

Enfin $V_{H_2} = n(H_2)\,V_m$, d'où :

$$V_{H_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{I\,\Delta t\,V_m}{N_A\,e}$$

COMPRENDRE
Le produit $N_A\,e$ est la charge d'une mole d'électrons, environ $9{,}6 \times 10^4$ C · mol^{-1} : c'est la constante de Faraday, parfois donnée directement dans les sujets.

MÉTHODE
Toute électrolyse se traite par la même chaîne : $I\,\Delta t$ donne Q, puis $n(e^-)$, puis la quantité de produit grâce à la demi-équation, enfin la masse ou le volume.

1.4 L'intensité du courant vaut $I = 5{,}00 \times 10^4$ A. Calculer le volume de dihydrogène produit par heure de fonctionnement.

Données utiles $N_A = 6{,}02 \times 10^{23}$ mol^{-1} ; $e = 1{,}60 \times 10^{-19}$ C ; $V_m = 30{,}0$ L · mol^{-1} ; $\Delta t = 1$ h $= 3600$ s

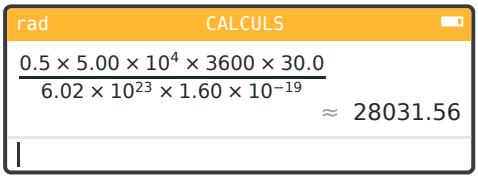
$$V_{H_2} = \frac{1}{2} \times \frac{5{,}00 \times 10^4 \times 3600 \times 30{,}0}{6{,}02 \times 10^{23} \times 1{,}60 \times 10^{-19}} = 2{,}80 \times 10^4 \text{ L}$$

$V_{H_2} = 2{,}80 \times 10^4$ L $= 28{,}0$ m^3 par heure

PIÈGE
Laisser la durée en heures : $Q = I\,\Delta t$ exige des secondes. Le résultat sort en litres, parce que V_m est en L · mol^{-1}.

COMPRENDRE
Trois chiffres significatifs, comme toutes les données ; la durée d'une heure est une valeur exacte, elle ne limite pas la précision.

À LA CALCULATRICE



2.1.1 Compléter le tableau d'avancement de la réaction $2\,H_2O_2\,(aq) = O_2\,(g) + 2\,H_2O\,(l)$ donné en annexe.

Quantité initiale d'eau oxygénée : $n_0 = c\,V$. Pour un avancement x, il disparaît $2x$ mol de H_2O_2 et il se forme x mol de O_2. La réaction étant totale, l'avancement final est x_{max}.

Tableau complété ci-dessous : $n(H_2O_2) = c\,V - 2x$ et $n(O_2) = x$.

PIÈGE
Oublier le coefficient 2 devant x dans la colonne de H_2O_2, ou prendre le volume total V_T à la place de $V = 24$ mL pour la quantité initiale.

		2 H₂O₂(aq)	=	O₂(g)	+	2 H₂O(ℓ)
État	Avancement (mol)	Quantités de matière en mol				
État initial	0	c·V		0		Excès
En cours de transformation	x	c·V − 2x		x		Excès
État final	x_{max}	c·V − 2x_{max} = 0		x_{max}		Excès

2.1.1 · Tableau d'avancement complété (en orange, ce que l'élève écrit)

2.1.2 Calculer la valeur de l'avancement maximal x_{max} de la réaction.

Données utiles $c = 2{,}5\ \text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$; $V = 24\ \text{mL}$

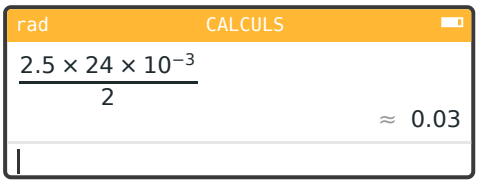
L'eau oxygénée, seul réactif, est entièrement consommée à l'état final : $c\,V - 2\,x_{max} = 0$.

$$x_{max} = \frac{c\,V}{2} = \frac{2{,}5 \times 24 \times 10^{-3}}{2}$$

$x_{max} = 3{,}0 \times 10^{-2}$ mol, soit 30 mmol

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme c et V. La valeur de 30 mmol est bien celle vers laquelle tend la courbe de l'annexe.

À LA CALCULATRICE



2.1.3 Établir l'expression de l'avancement $x(t)$ de la réaction en fonction du volume de dioxygène $V_{O_2}(t)$ formé.

D'après le tableau d'avancement : $x(t) = n_{O_2}(t)$.

Le dioxygène est assimilé à un gaz parfait : $P\,V_{O_2}(t) = n_{O_2}(t)\,R\,T$.

$$x(t) = \frac{P\,V_{O_2}(t)}{R\,T}$$

PIÈGE
Dans cette relation, V_{O_2} s'exprime en m^3, P en pascals et T en kelvins.

2.1.4 Calculer la valeur de l'avancement à l'instant $t = 30$ min.

Données utiles $V_{O_2}(30\ \text{min}) = 540\ \text{mL}$; $P = 1{,}013 \times 10^5\ \text{Pa}$; $R = 8{,}31\ \text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$; $\theta = 25\ ^\circ\text{C}$

$V_{O_2} = 540\ \text{mL} = 540 \times 10^{-6}\ \text{m}^3$ et $T = 273{,}15 + 25 = 298{,}15\ \text{K}$.

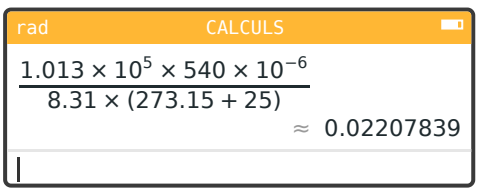
$$x(30\ \text{min}) = \frac{1{,}013 \times 10^5 \times 540 \times 10^{-6}}{8{,}31 \times 298{,}15}$$

$x(30\ \text{min}) = 2{,}21 \times 10^{-2}$ mol, soit 22,1 mmol

PIÈGE
Conversion du volume : $1\ \text{mL} = 10^{-6}\ \text{m}^3$ (et non 10^{-3}). Laisser la température en degrés Celsius donne un résultat douze fois trop grand.

COMPRENDRE
Sur le graphe de l'annexe, on lit environ 23 mmol à 30 min : même ordre de grandeur, l'écart de quelques pour cent vient du tracé. C'est le calcul qui est attendu ici.

À LA CALCULATRICE



2.2.1 Définir le temps de demi-réaction $t_{1/2}$ et déterminer sa valeur par une construction graphique sur le graphe $x(t)$ de l'annexe.

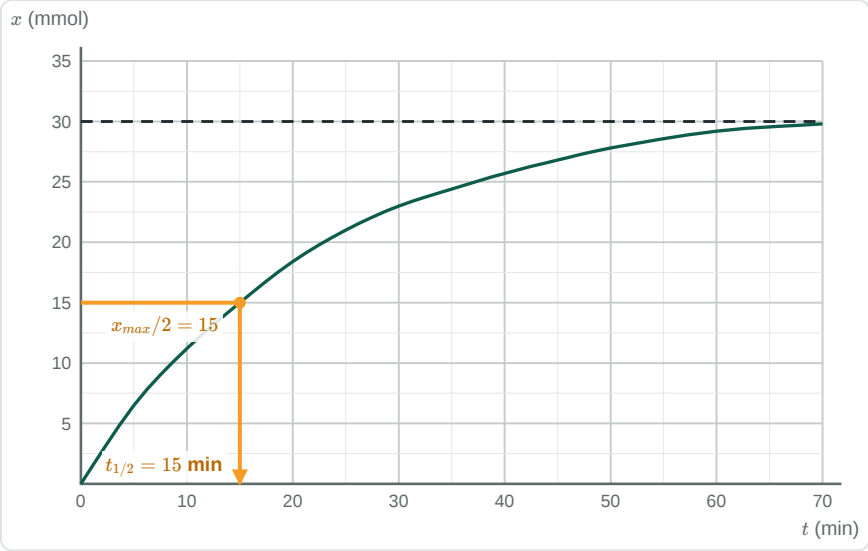
Données utiles $x_{max} = 30$ mmol (2.1.2)

Le temps de demi-réaction $t_{1/2}$ est la durée nécessaire pour que l'avancement atteigne la moitié de sa valeur finale : $x(t_{1/2}) = \frac{x_f}{2}$.

La réaction est totale : $x_f = x_{max} = 30$ mmol, donc $\frac{x_f}{2} = 15$ mmol. On trace l'horizontale d'ordonnée 15 mmol jusqu'à la courbe, puis la verticale jusqu'à l'axe des temps.

$t_{1/2} \approx 15$ min

PIÈGE
Lire le temps pour lequel $x = x_{max}$ puis le diviser par deux. C'est l'avancement que l'on divise par deux, pas la durée de la réaction.



2.2.1 · Graphe de l'annexe : construction du temps de demi-réaction

2.2.2 Quelle information le graphe $x(t)$ donne-t-il sur l'évolution de la vitesse de la réaction au cours du temps ? Justifier.

La vitesse volumique de réaction est $v = \frac{1}{V_T}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, avec V_T constant : à chaque date, elle est proportionnelle à la pente de la tangente à la courbe $x(t)$.

Or les tangentes à la courbe sont de moins en moins inclinées quand t augmente, jusqu'à devenir presque horizontales.

La vitesse de la réaction diminue au cours du temps (elle tend vers zéro).

COMPRENDRE
Le programme actuel raisonne avec la vitesse volumique de disparition du réactif, $-\frac{\mathrm{d}[\mathrm{H_2O_2}]}{\mathrm{d}t}$. Elle vaut ici $2v$: la conclusion est la même.

2.3.1 Quel facteur cinétique permet d'expliquer l'évolution de la vitesse de la réaction au cours du temps ? Interpréter microscopiquement cette évolution.

Le facteur cinétique en jeu est la **concentration du réactif** : l'eau oxygénée est consommée, sa concentration diminue au cours du temps, à température constante.

À l'échelle microscopique, les molécules de $\mathrm{H_2O_2}$ sont de moins en moins nombreuses dans un même volume : les chocs efficaces auxquels elles participent deviennent moins fréquents, il se forme moins de dioxygène par unité de temps.

La concentration en $\mathrm{H_2O_2}$ diminue : les chocs efficaces sont moins fréquents, la vitesse diminue.

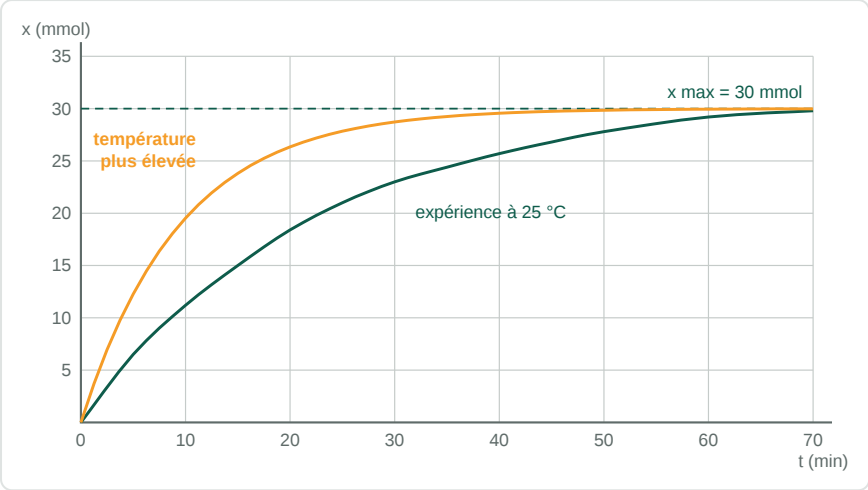
2.3.2 Dessiner sur le graphe de l'annexe l'allure de la courbe obtenue si l'expérience avait été réalisée à une température plus élevée. Justifier.

La température est un facteur cinétique : plus elle est élevée, plus la réaction est rapide. La nouvelle courbe part de l'origine avec une tangente plus inclinée et reste au-dessus de la première.

L'état final ne change pas : la réaction est totale et la quantité initiale d'eau oxygénée est la même, donc la courbe tend vers la même valeur $x_{max} = 30$ mmol, atteinte plus tôt.

Courbe au-dessus de la première, même asymptote $x_{max} = 30$ mmol, $t_{1/2}$ plus petit.

PIÈGE
Tracer une courbe qui dépasse 30 mmol. La température modifie la vitesse d'une transformation totale, pas son avancement final.



2.3.2 · Annexe : en orange, l'allure de la courbe à température plus élevée

2.3.3 Le même mélange initial est complété avec de l'eau distillée jusqu'à un volume total $V'_T = 0{,}50$ L. Dire, en justifiant, si chaque proposition est vraie ou fausse. Proposition 1 : l'avancement final est divisé par deux. Proposition 2 : l'état final est atteint plus rapidement.

Proposition 1 : FAUSSE. L'avancement final vaut $x_{max} = \dfrac{cV}{2}$: il ne dépend que de la quantité d'eau oxygénée introduite, qui est inchangée. Il reste égal à 30 mmol.

Proposition 2 : VRAIE. Le volume total est deux fois plus petit, donc les concentrations initiales de l'eau oxygénée et du catalyseur sont deux fois plus grandes. La concentration étant un facteur cinétique, la réaction est plus rapide.

Proposition 1 fausse ; proposition 2 vraie.

PIÈGE
Confondre quantité de matière et concentration. Ajouter moins d'eau change les concentrations, donc la vitesse, mais pas les quantités de matière, donc pas l'avancement final.

2.4.1 Rappeler la définition d'un catalyseur.

Un catalyseur est une espèce chimique qui augmente la vitesse d'une réaction sans apparaître dans son équation : consommé puis régénéré, il se retrouve intact en fin de transformation.

COMPRENDRE
Un catalyseur ne modifie pas l'état final du système : il permet seulement de l'atteindre plus vite.

2.4.2 Lors de ce suivi cinétique, la catalyse mise en jeu est-elle homogène ou hétérogène ? Justifier.

Le catalyseur, l'ion $\mathrm{Fe^{3+}(aq)}$, et le réactif $\mathrm{H_2O_2(aq)}$ sont tous deux dissous dans la solution aqueuse : ils forment une seule phase.

La catalyse est homogène.

COMPRENDRE
La même décomposition catalysée par un fil de platine, solide plongé dans la solution, serait une catalyse hétérogène.

L'oscillateur élastique horizontal

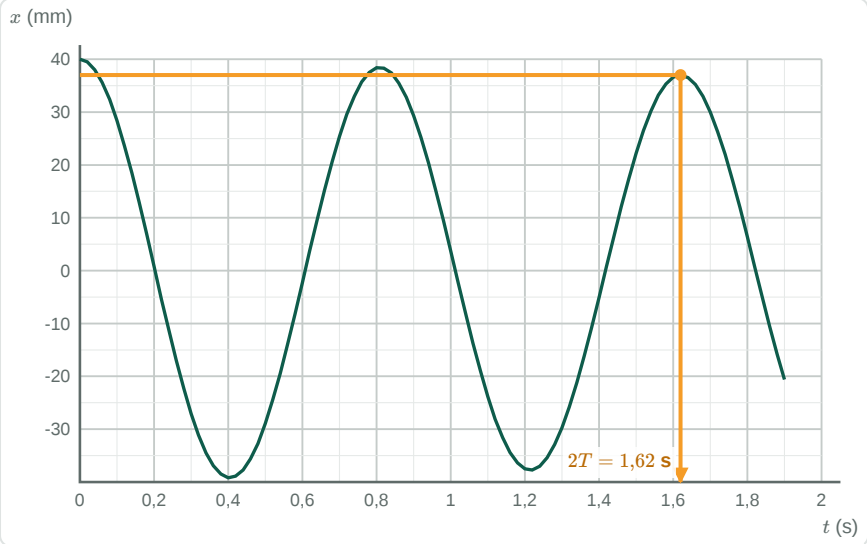
Bac S 2009 Liban (ancien programme) · Exercice 2 **4 points** **Durée conseillée 52 min**

1.1 Déterminer graphiquement la pseudo-période T de l'oscillateur à partir de la courbe 1.

Pour gagner en précision, on mesure deux pseudo-périodes : la courbe 1 part d'un maximum à $t = 0$ et atteint son deuxième maximum suivant à $t = 1{,}62$ s.

$2T = 1{,}62$ s, donc $T = \dfrac{1{,}62}{2}$

$T = 0{,}81$ s ; on prendra $T_0 = T = 0{,}81$ s.

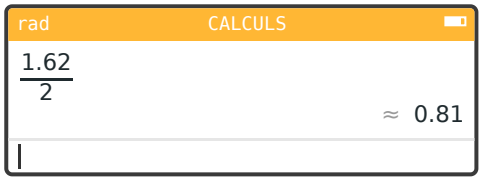


1.1 · Courbe 1 du sujet : deux pseudo-périodes entre $t = 0$ et le deuxième maximum

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs : la lecture graphique ne permet pas mieux. On parle de pseudo-période parce que l'amplitude diminue ; pour un amortissement faible, elle est très proche de la période propre.

MÉTHODE
Mesurer plusieurs périodes puis diviser : l'incertitude de lecture est partagée entre elles. Repérer des maximums ou des passages par zéro dans le même sens.

À LA CALCULATRICE



1.2 Montrer sans calcul que la grandeur énergétique de la courbe 2 ne peut être que l'énergie potentielle élastique E_{pe} du système {mobile + ressort}.

Le système possède une énergie cinétique $E_c = \dfrac{1}{2} m v^2$, une énergie potentielle élastique $E_{pe} = \dfrac{1}{2} k x^2$ et une énergie mécanique $E_m = E_c + E_{pe}$.

- À $t = 0$, $v_0 = 0$ donc $E_c = 0$: or la courbe 2 est maximale à cette date. Ce n'est pas l'énergie cinétique.
- La courbe 2 s'annule périodiquement, alors que l'énergie mécanique ne s'annule jamais pendant les oscillations. Ce n'est pas l'énergie mécanique.
- La courbe 2 est maximale quand $|x|$ est maximale ($t = 0$; 0,4 s ; 0,8 s) et nulle quand $x = 0$ ($t = 0{,}2$ s ; 0,6 s), comme $\dfrac{1}{2} k x^2$.

La courbe 2 représente l'énergie potentielle élastique E_{pe}.

PIÈGE
Écarter seulement l'énergie cinétique ne suffit pas : l'énergie mécanique est elle aussi non nulle à $t = 0$. Il faut un argument contre chacune des deux autres énergies.

2.1 À l'aide des courbes 1 et 2, montrer que la constante de raideur k du ressort vaut $3{,}0\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}$.

Données utiles à $t = 0$: $x_0 = 40\ \text{mm} = 4{,}0 \times 10^{-2}$ m (courbe 1) ; $E_{pe}(0) = 2{,}4\ \text{mJ} = 2{,}4 \times 10^{-3}$ J (courbe 2)

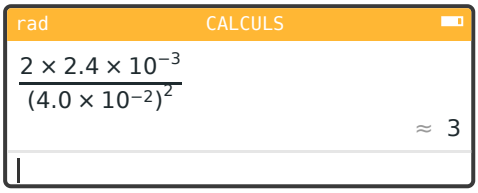
À $t = 0$: $E_{pe}(0) = \dfrac{1}{2} k x_0^2$, donc $k = \dfrac{2\,E_{pe}(0)}{x_0^2}$

$$k = \frac{2 \times 2{,}4 \times 10^{-3}}{(4{,}0 \times 10^{-2})^2}$$

$k = 3{,}0\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}$, valeur attendue.

PIÈGE
Laisser x_0 en millimètres ou E_{pe} en millijoules : la relation exige des mètres et des joules. Ne pas oublier le carré sur x_0.

À LA CALCULATRICE



2.2 Donner l'expression de la masse m du mobile en fonction de k et de T_0, puis calculer sa valeur.

Données utiles $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$; $k = 3{,}0\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}$ (2.1) ; $T_0 = 0{,}81$ s (1.1)

On élève l'expression de la période au carré : $T_0^2 = 4\pi^2 \dfrac{m}{k}$, donc

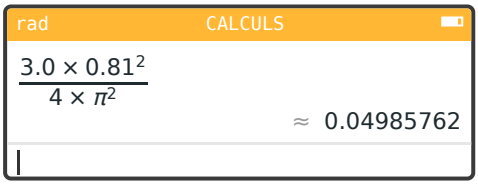
$$m = \frac{k\,T_0^2}{4\pi^2}$$

$$m = \frac{3{,}0 \times 0{,}81^2}{4\pi^2} = 5{,}0 \times 10^{-2}\ \text{kg}$$

$m = \dfrac{k\,T_0^2}{4\pi^2} = 5{,}0 \times 10^{-2}$ kg, soit 50 g.

MÉTHODE
Pour isoler une grandeur placée sous une racine, élever d'abord les deux membres au carré. Vérifier l'unité : $\text{N}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^2 = \text{kg}$.

À LA CALCULATRICE



3.1 Les forces de frottement sont-elles négligeables ? Justifier.

Sur la courbe 1, l'amplitude des oscillations diminue : 40 mm à $t = 0$, environ 37 mm deux pseudo-périodes plus tard. De même, les maximums de E_{pe} passent de 2,4 mJ à 2,0 mJ sur la courbe 2.

Le système perd de l'énergie mécanique au cours du temps : elle est dissipée par les frottements.

Les forces de frottement ne sont pas négligeables.

COMPRENDRE
Sans frottement, l'amplitude resterait égale à 40 mm et les maximums de E_{pe} à 2,4 mJ. L'amortissement reste faible : le régime est pseudo-périodique, ce qui autorise à confondre T et T_0.

3.2 Dessiner sur un même graphe, pour un oscillateur sans frottement, les allures des énergies potentielle élastique, cinétique et mécanique en fonction du temps, avec les conditions initiales de l'oscillateur étudié.

Données utiles $x_0 = 4{,}0$ cm ; $v_0 = 0$; $E_{pe}(0) = 2{,}4$ mJ (2.1)

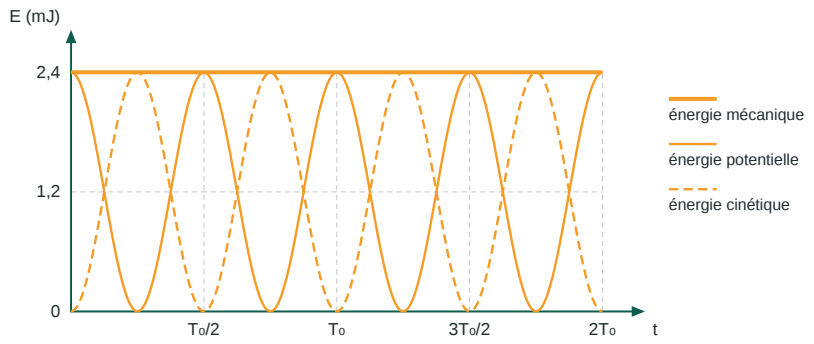
Conditions initiales : $E_c(0) = 0$ car $v_0 = 0$; $E_{pe}(0) = 2{,}4$ mJ.

Sans frottement, l'énergie mécanique se conserve : $E_m = E_c + E_{pe} = 2{,}4$ mJ à chaque instant. C'est une droite horizontale.

E_{pe} part de sa valeur maximale, E_c part de zéro. Quand l'une est maximale, l'autre est nulle ; elles se croisent à $\dfrac{E_m}{2} = 1{,}2$ mJ. Chacune s'annule deux fois par période du mouvement : leur période est $\dfrac{T_0}{2}$.

Voir le graphe : E_m constante à 2,4 mJ ; E_{pe} et E_c de période $\dfrac{T_0}{2}$, variant en sens contraires entre 0 et 2,4 mJ.

PIÈGE
Donner aux énergies la période T_0 du mouvement. Sur une durée T_0, le mobile atteint deux fois l'élongation maximale ($+x_0$ et $-x_0$) : E_{pe} présente donc deux maximums.



3.2 · Oscillateur sans frottement : E_m constante, E_{pe} et E_c de période $T_0/2$, en opposition

4.1 Établir l'équation différentielle vérifiée par l'abscisse $x(t)$ pour un oscillateur élastique horizontal sans frottement, en précisant le référentiel, les forces et la loi utilisée.

Système : le mobile, de masse m et de centre d'inertie G. Référentiel : terrestre (le laboratoire), supposé galiléen.

Forces exercées sur le mobile :

- son poids $\vec{P}$, vertical ;
- la réaction $\vec{R}$ du coussin d'air, verticale puisqu'il n'y a pas de frottement ;
- la force de rappel du ressort $\vec{F} = -k\,x\,\vec{i}$, où x est l'abscisse de G comptée depuis la position d'équilibre O.

Deuxième loi de Newton : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m\,\vec{a}$

En projection sur l'axe horizontal $(O, \vec{i})$, $\vec{P}$ et $\vec{R}$ ont une composante nulle : $-k\,x = m\,\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}\,x = 0$$

PIÈGE
Oublier le signe « $-$ » de la force de rappel. Elle ramène toujours le mobile vers O : sa composante est négative quand $x > 0$, positive quand $x < 0$.

MÉTHODE
Toujours le même ordre : système, référentiel galiléen, bilan des forces, deuxième loi de Newton, projection sur l'axe du mouvement.

4.2 Vérifier que $x(t) = x_0 \cos\left(\dfrac{2\pi t}{T_0}\right)$ est solution de cette équation différentielle.

On dérive deux fois par rapport au temps :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -x_0 \frac{2\pi}{T_0} \sin\left(\frac{2\pi t}{T_0}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -x_0 \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \cos\left(\frac{2\pi t}{T_0}\right) = -\frac{4\pi^2}{T_0^2}\, x(t)$$

Or $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ donne $T_0^2 = 4\pi^2 \dfrac{m}{k}$, soit $\dfrac{4\pi^2}{T_0^2} = \dfrac{k}{m}$. Donc :

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k}{m}\, x(t)$$

$\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{k}{m}\, x = 0$: la fonction proposée est bien solution.

PIÈGE

Dériver $\cos(a\,t)$ fait sortir le facteur $a = \dfrac{2\pi}{T_0}$ à chaque dérivation : il apparaît donc au carré dans la dérivée seconde.

COMPRENDRE

Cette solution respecte aussi les conditions initiales : $x(0) = x_0 \cos 0 = x_0$, et la vitesse $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, proportionnelle à un sinus, est nulle à $t = 0$.

Le cercle des planètes disparues

Bac S 2009 Liban (ancien programme) · Exercice 3 **5 points** **Durée conseillée 1 h 05**

1.1 Énoncer précisément la troisième loi de Kepler pour une planète en orbite elliptique autour du Soleil.

Pour toutes les planètes du système solaire, le rapport du carré de la période de révolution T au cube du demi-grand axe a de l'ellipse a la même valeur :

$\dfrac{T^2}{a^3} = k$, où la constante k ne dépend que du Soleil.

PIÈGE
Écrire « rayon » : l'orbite est une ellipse, la longueur qui intervient est le demi-grand axe a. Ne pas inverser les exposants : carré pour la période, cube pour la longueur.

1.2 L'orbite d'Éris se situe-t-elle au-delà ou en deçà de celle de Pluton ? Justifier sans calcul.

Données utiles $T_E \approx 557$ ans ; $T_P = 248$ ans

Éris et Pluton tournent toutes deux autour du Soleil, donc la troisième loi de Kepler leur attribue la même constante : $\dfrac{T_E^2}{a_E^3} = \dfrac{T_P^2}{a_P^3}$.

D'après cette loi, la période augmente quand le demi-grand axe augmente. Or $T_E > T_P$, donc $a_E > a_P$.

L'orbite d'Éris est **au-delà** de celle de Pluton.

COMPRENDRE
La comparaison n'a de sens que parce que les deux astres ont le même astre attracteur. La période de la Terre, donnée dans l'énoncé, ne sert pas ici.

2.1.1 Définir le référentiel permettant d'étudier le mouvement de Dysnomia autour d'Éris.

Le référentiel a pour origine le centre d'Éris et ses trois axes pointent vers des étoiles lointaines considérées comme fixes (référentiel « ériscentrique »).

COMPRENDRE
C'est l'équivalent, pour Éris, du référentiel géocentrique pour la Terre : il ne tourne pas avec l'astre. Un référentiel lié au sol d'Éris ne conviendrait pas.

2.1.2 Établir l'expression du vecteur accélération $\vec{a}$ du centre d'inertie de Dysnomia en fonction des paramètres de l'énoncé et du vecteur unitaire $\vec{u}_{ED}$.

Système {Dysnomia}, de masse M_D constante ; référentiel ériscentrique supposé galiléen.

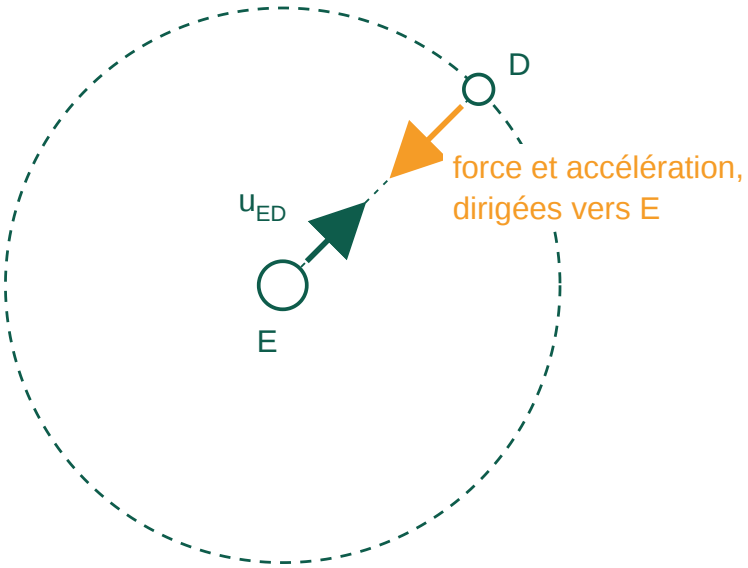
Seule force : l'attraction gravitationnelle d'Éris, $\overrightarrow{F}_{E/D} = -\dfrac{G\,M_E\,M_D}{R_D^2}\,\vec{u}_{ED}$.

Deuxième loi de Newton : $\overrightarrow{F}_{E/D} = M_D\,\vec{a}$, soit $-\dfrac{G\,M_E\,M_D}{R_D^2}\,\vec{u}_{ED} = M_D\,\vec{a}$.

$\vec{a} = -\dfrac{G\,M_E}{R_D^2}\,\vec{u}_{ED}$

PIÈGE
Oublier le signe « $-$ ». Le vecteur $\vec{u}_{ED}$ va de E vers D alors que la force attire Dysnomia vers Éris : force et accélération sont de sens opposé à $\vec{u}_{ED}$.

COMPRENDRE
La masse M_D se simplifie : l'accélération du satellite ne dépend pas de sa propre masse, seulement de celle de l'astre attracteur et de la distance.



2.1.2 · Schéma du sujet, complété par la force et l'accélération

2.1.3 Préciser la direction et le sens de ce vecteur accélération.

Le vecteur $\vec{a}$ est colinéaire à $\vec{u}_{ED}$ et de sens contraire (coefficient négatif).

Direction : la droite (ED), c'est-à-dire le rayon de l'orbite. Sens : de Dysnomia vers Éris. L'accélération est radiale et **centripète**.

2.1.4 Montrer que $T_D = 2\pi\sqrt{\dfrac{R_D^3}{G\,M_E}}$. Retrouve-t-on la troisième loi de Kepler ? Justifier.

Le mouvement est circulaire et uniforme : l'accélération est centripète, de valeur $a = \dfrac{v^2}{R_D}$.

D'après 2.1.2, $a = \dfrac{G\,M_E}{R_D^2}$. Donc $\dfrac{v^2}{R_D} = \dfrac{G\,M_E}{R_D^2}$, soit $v = \sqrt{\dfrac{G\,M_E}{R_D}}$.

En une période, Dysnomia parcourt le périmètre $2\pi R_D$ à la vitesse constante v :

$$T_D = \frac{2\pi R_D}{v} = 2\pi R_D\sqrt{\frac{R_D}{G\,M_E}} = 2\pi\sqrt{\frac{R_D^3}{G\,M_E}}$$

En élevant au carré : $\dfrac{T_D^2}{R_D^3} = \dfrac{4\pi^2}{G\,M_E}$.

$T_D = 2\pi\sqrt{\dfrac{R_D^3}{G\,M_E}}$; le rapport $\dfrac{T_D^2}{R_D^3}$ est une constante qui ne dépend que d'Éris : on retrouve la troisième loi de Kepler, le rayon du cercle jouant le rôle du demi-grand axe.

PIÈGE

Pour faire entrer R_D sous la racine, il faut l'écrire $\sqrt{R_D^2}$: on obtient R_D^3 au numérateur, pas R_D^2.

MÉTHODE

Orbite circulaire : 1) $a = \dfrac{v^2}{R}$ égalée à $\dfrac{GM}{R^2}$ donne v ; 2) $T = \dfrac{2\pi R}{v}$; 3) élever au carré pour isoler $\dfrac{T^2}{R^3}$.

2.2.1 Déduire de l'expression de T_D celle de la masse M_E d'Éris. Calculer sa valeur.

Données utiles $R_D = 3{,}60 \times 10^7$ m ; $T_D = 1{,}30 \times 10^6$ s ; $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ m$^3 \cdot$ kg$^{-1} \cdot$ s^{-2}

$$T_D^2 = \frac{4\pi^2 R_D^3}{G\,M_E} \text{ donc } M_E = \frac{4\pi^2 R_D^3}{G\,T_D^2}$$

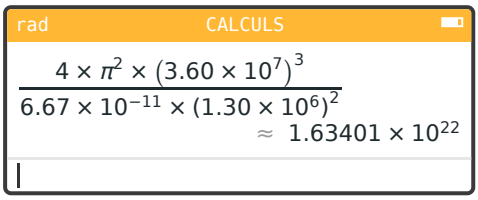
$$M_E = \frac{4\pi^2 \times (3{,}60 \times 10^7)^3}{6{,}67 \times 10^{-11} \times (1{,}30 \times 10^6)^2}$$

$$\boxed{M_E = 1{,}63 \times 10^{22} \text{ kg}}$$

PIÈGE
La période doit être en secondes ($1{,}30 \times 10^6$ s, et non 15,0 jours) et le rayon en mètres. Ne pas oublier le cube sur R_D ni le carré sur T_D.

COMPRENDRE
Trois chiffres significatifs, comme chacune des données. Observer un satellite (rayon et période de son orbite) suffit à « peser » l'astre autour duquel il tourne.

À LA CALCULATRICE



2.2.2 Calculer le rapport $\frac{M_E}{M_P}$. Expliquer pourquoi la découverte d'Éris a remis en cause le statut de planète pour Pluton.

Données utiles $M_E = 1{,}63 \times 10^{22}$ kg (2.2.1) ; $M_P = 1{,}31 \times 10^{22}$ kg

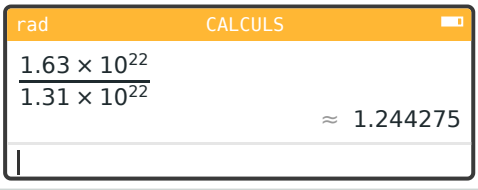
$$\frac{M_E}{M_P} = \frac{1{,}63 \times 10^{22}}{1{,}31 \times 10^{22}} = 1{,}24$$

Éris est donc un peu plus massive que Pluton (environ 25 % de plus). Si Pluton est une planète, Éris, plus massive, devrait l'être aussi, ainsi que les astres similaires découverts à la même époque. Il fallait soit allonger la liste des planètes, soit retirer ce statut à Pluton.

$\frac{M_E}{M_P} \approx 1{,}24$: Éris est plus massive que Pluton, qui a donc été classée « planète naine », comme Éris.

COMPRENDRE
Avec la valeur non arrondie de M_E, le rapport vaut 1,25 : l'écart sur le dernier chiffre vient de l'arrondi intermédiaire. Les deux réponses sont acceptées, la conclusion est la même.

À LA CALCULATRICE



Spécialité : La radio B.L.U.

Bac S 2009 Liban (ancien programme) · Exercice 4 **4 points** **Durée conseillée 52 min**

1.1 (Partie A) Rappeler l'intervalle des fréquences audibles par l'homme.

Sons audibles : $20\ \text{Hz} \leqslant f \leqslant 20\ \text{kHz}$

COMPRENDRE
En dessous de 20 Hz, ce sont les infrasons ; au-dessus de 20 kHz, les ultrasons. Ces bornes sont des ordres de grandeur, elles varient avec l'âge.

1.2 (Partie A) Donner au moins une raison pour laquelle une modulation est nécessaire pour transmettre un signal sonore par onde hertzienne.

Données utiles $c = 3{,}0 \times 10^8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ (valeur à connaître)

Une antenne a une taille du même ordre de grandeur que la longueur d'onde de l'onde émise ou reçue. Pour une onde hertzienne de fréquence audible, par exemple $f = 1{,}0$ kHz :

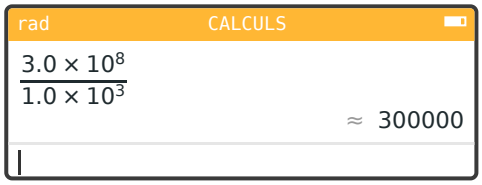
$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3{,}0 \times 10^8}{1{,}0 \times 10^3} = 3{,}0 \times 10^5\ \text{m} = 300\ \text{km}$$

Une telle antenne est irréalisable. De plus, tous les émetteurs occuperaient la même bande de fréquences (20 Hz à 20 kHz) : un récepteur ne pourrait pas les séparer.

Sans modulation, les antennes seraient gigantesques et les émissions se mélangeraient : on fait porter le signal par une onde de haute fréquence.

COMPRENDRE
Une seule raison suffit pour avoir les points. Chaque station reçoit sa propre fréquence de porteuse : le récepteur choisit la station en s'accordant sur cette fréquence.

À LA CALCULATRICE



2.1 (Partie A) Quel signal correspond à la porteuse ? Justifier.

Données utiles $v(t) = V_m \cos(2\pi F t)$ avec $F = 2{,}0$ kHz ; $u(t) = U_m \cos(2\pi f t) + U_0$ avec $f = 100$ Hz

La porteuse est le signal sinusoïdal de haute fréquence. Ici $F = 2{,}0\ \text{kHz} = 20\ f$: la fréquence de $v(t)$ est très supérieure à celle de $u(t)$.

Le signal $u(t)$, de basse fréquence, est le signal modulant auquel on a ajouté la tension continue de décalage U_0.

La porteuse est $v(t)$, de fréquence $F = 2{,}0$ kHz.

PIÈGE
Répondre sans comparer les fréquences. « Justifier » attend l'argument $F \gg f$; la présence de U_0 dans $u(t)$ est un second indice.

2.2 (Partie A) Montrer que $s(t)$ peut se mettre sous la forme $s(t) = A(t)\cos(2\pi Ft)$. Justifier le nom donné à ce type de modulation.

Données utiles $s(t) = k\,u(t)\,v(t)$

$s(t) = k\left[U_m\cos(2\pi ft) + U_0\right]V_m\cos(2\pi Ft)$

On regroupe tout ce qui multiplie $\cos(2\pi Ft)$:

$$A(t) = k\,V_m\left[U_m\cos(2\pi ft) + U_0\right] = k\,V_m\,U_0\left[1 + \frac{U_m}{U_0}\cos(2\pi ft)\right]$$

L'amplitude de la porteuse n'est plus la constante V_m : elle vaut $A(t)$, fonction affine du signal modulant, qui varie lentement à la fréquence f. C'est donc l'amplitude de la porteuse qui est modulée.

$s(t) = A(t)\cos(2\pi Ft)$ avec $A(t) = k\,V_m\left[U_m\cos(2\pi ft) + U_0\right]$: modulation d'**amplitude**.

COMPRENDRE
$A(t)$ oscille entre $kV_m(U_0 - U_m)$ et $kV_m(U_0 + U_m)$. En reportant dans la définition de la question 3, on obtient $m = U_m/U_0$: la condition $U_m < U_0$ assure $m < 1$.

3.1 (Partie A) Quelle condition doit satisfaire m pour pouvoir effectuer une démodulation correcte par détection d'enveloppe ?

Il faut que $A(t)$ reste toujours positive : l'enveloppe de $s(t)$ a alors la même forme que le signal modulant. Cela impose $A_{\min} > 0$.

$m < 1$ (pas de surmodulation)

COMPRENDRE
Si $m > 1$, $A(t)$ change de signe : les enveloppes haute et basse se croisent et le détecteur d'enveloppe restitue un signal déformé.

3.2 (Partie A) Déterminer la valeur du taux de modulation m en utilisant le graphe.

Données utiles $m = \dfrac{A_{\max} - A_{\min}}{A_{\max} + A_{\min}}$; oscillogramme de $s(t)$

On lit sur l'enveloppe supérieure de $s(t)$: au plus haut $A_{\max} = 1{,}8$ V, au plus bas (vers $t = 10$ ms) $A_{\min} = 0{,}6$ V.

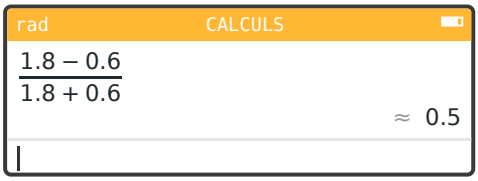
$$m = \frac{1{,}8 - 0{,}6}{1{,}8 + 0{,}6} = \frac{1{,}2}{2{,}4}$$

$m = 0{,}50$: inférieur à 1, la modulation est correcte.

PIÈGE
Prendre pour $A_{\min}$ la valeur la plus basse de $s(t)$, soit $-1{,}8$ V. $A_{\max}$ et $A_{\min}$ se lisent toutes deux du même côté, sur l'enveloppe supérieure.

COMPRENDRE
Lecture graphique à 0,1 V près : deux chiffres significatifs au plus. m est un rapport de tensions, il n'a pas d'unité.

À LA CALCULATRICE

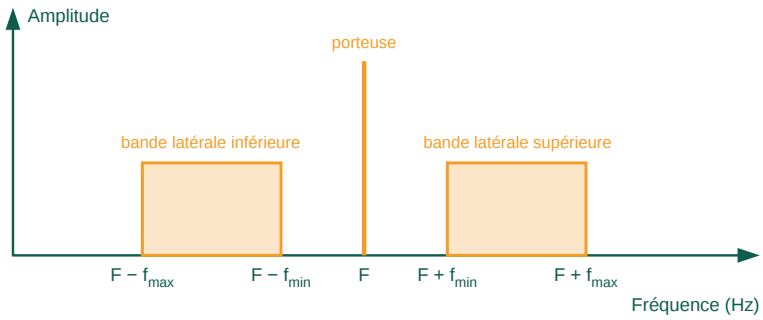


1 (Partie B) Donner l'allure du spectre si le signal modulant est un signal complexe comportant plusieurs fréquences comprises entre $f_{\min}$ et $f_{\max}$.

Chaque fréquence f du signal modulant donne deux raies, en $F - f$ et en $F + f$. Avec toutes les fréquences de $f_{\min}$ à $f_{\max}$, les raies latérales deviennent deux bandes, symétriques par rapport à la raie de la porteuse.

Raie de la porteuse en F, encadrée par les bandes $[F - f_{\max}\,;\,F - f_{\min}]$ et $[F + f_{\min}\,;\,F + f_{\max}]$.

PIÈGE
Inverser les bornes de la bande inférieure : la fréquence la plus éloignée de F est $F - f_{\max}$, pas $F - f_{\min}$.



1 · Spectre du signal modulé par un signal complexe

2.1 (Partie B) Justifier le nom « filtre passe-bande » donné à ce dispositif.

L'amplitude de sortie U_S n'est importante que pour les fréquences voisines de f_0, dans l'intervalle $[f_{c1}\,;\,f_{c2}]$ où $U_S \geqslant \dfrac{U_{S\,\max}}{\sqrt{2}}$. En dehors, elle est très faible : ces signaux sont pratiquement éliminés.

Le filtre ne laisse passer qu'une bande de fréquences, $[f_{c1}\,;\,f_{c2}]$, centrée sur f_0 : c'est un passe-bande.

2.2 (Partie B) Montrer par analyse dimensionnelle que l'expression $f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ peut convenir.

Les constantes de temps $\tau = RC$ (dipôle RC) et $\tau = \dfrac{L}{R}$ (dipôle RL) sont des durées : $[RC] = \mathrm{T}$ et $\left[\dfrac{L}{R}\right] = \mathrm{T}$.

Or $LC = \dfrac{L}{R} \times RC$, donc $[LC] = \mathrm{T}^2$ et $\left[\sqrt{LC}\right] = \mathrm{T}$.

Le facteur 2π est sans dimension :

$\left[\dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}\right] = \mathrm{T}^{-1}$: c'est la dimension d'une fréquence, l'expression peut convenir.

COMPRENDRE
« Peut convenir » : l'analyse dimensionnelle valide l'homogénéité, pas le facteur 2π, qui est sans dimension.

MÉTHODE
Autre voie, sans constantes de temps : $u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ donne $[L] = \mathrm{U}\cdot\mathrm{T}\cdot\mathrm{I}^{-1}$ et $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ donne $[C] = \mathrm{I}\cdot\mathrm{T}\cdot\mathrm{U}^{-1}$; le produit vaut T^2.

2.3 (Partie B) En supposant la bande passante $[f_{c1}\,;\,f_{c2}]$ étroite, quelle valeur doit-on choisir pour f_0 ?

Données utiles $F = 2{,}0$ kHz ; $f = 100$ Hz

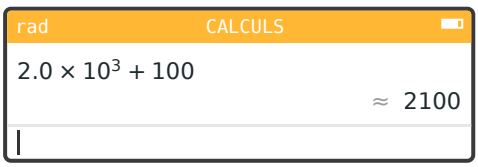
Le filtre ne doit conserver que la raie de fréquence $F + f$. La bande passante étant étroite, elle doit être centrée sur cette raie pour éliminer la porteuse (F) et la raie $F - f$.

$f_0 = F + f = 2{,}0 \times 10^3 + 100 = 2{,}1 \times 10^3$ Hz

$f_0 = F + f = 2{,}1$ kHz

COMPRENDRE
Pour un signal modulant complexe, on centre le filtre sur le milieu de la bande latérale supérieure : $f_0 = F + \dfrac{f_{\min} + f_{\max}}{2}$, avec une bande passante couvrant $[F + f_{\min}\,;\,F + f_{\max}]$.

À LA CALCULATRICE

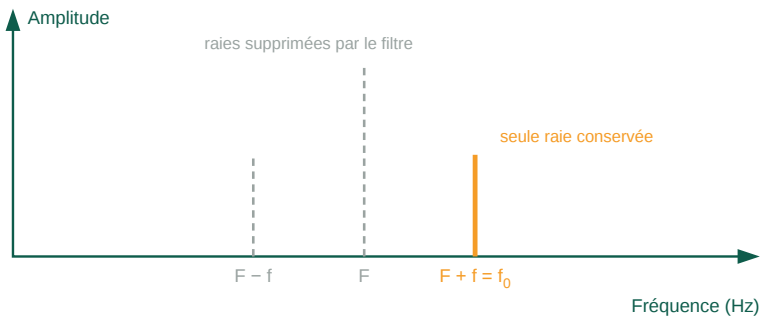


2.4 (Partie B) Représenter, dans ce cas, le spectre du signal obtenu à la sortie du filtre.

Le filtre, centré sur $f_0 = F + f$, élimine la porteuse et la raie latérale inférieure.

Le spectre ne contient plus qu'une seule raie, à la fréquence $F + f = f_0$.

COMPRENDRE
Si l'on prend le signal modulant complexe, la sortie du filtre est la seule bande $[F + f_{\min} ; F + f_{\max}]$: les deux représentations sont acceptables.



2.4 · Spectre à la sortie du filtre : une seule raie, de fréquence $F + f$

3 (Partie B) Justifier que le signal « B.L.U. » a une plus grande portée qu'un signal en modulation d'amplitude classique pour un émetteur de puissance donnée.

En modulation d'amplitude classique, la puissance de l'amplificateur se partage entre la porteuse et les deux bandes latérales. La porteuse, de plus grande amplitude, en reçoit la plus grande part alors qu'elle ne contient aucune information ; les deux bandes portent la même information.

En B.L.U., la porteuse et une bande sont supprimées : toute la puissance va à la seule bande latérale restante.

À puissance d'émetteur égale, la bande utile est émise avec plus de puissance en B.L.U. : le signal porte plus loin.

COMPRENDRE
Le récepteur B.L.U. doit recréer lui-même une porteuse de fréquence F pour retrouver le signal sonore : c'est le prix de cette économie de puissance.