Le cercle des planètes disparues

Bac S 2009 Liban (ancien programme) · Exercice 3 **5 points** **Durée conseillée 1 h 05**

1.1 Énoncer précisément la troisième loi de Kepler pour une planète en orbite elliptique autour du Soleil.

Pour toutes les planètes du système solaire, le rapport du carré de la période de révolution T au cube du demi-grand axe a de l'ellipse a la même valeur :

$\dfrac{T^2}{a^3} = k$, où la constante k ne dépend que du Soleil.

PIÈGE
Écrire « rayon » : l'orbite est une ellipse, la longueur qui intervient est le demi-grand axe a. Ne pas inverser les exposants : carré pour la période, cube pour la longueur.

1.2 L'orbite d'Éris se situe-t-elle au-delà ou en deçà de celle de Pluton ? Justifier sans calcul.

Données utiles $T_E \approx 557$ ans ; $T_P = 248$ ans

Éris et Pluton tournent toutes deux autour du Soleil, donc la troisième loi de Kepler leur attribue la même constante : $\dfrac{T_E^2}{a_E^3} = \dfrac{T_P^2}{a_P^3}$.

D'après cette loi, la période augmente quand le demi-grand axe augmente. Or $T_E > T_P$, donc $a_E > a_P$.

L'orbite d'Éris est **au-delà** de celle de Pluton.

COMPRENDRE
La comparaison n'a de sens que parce que les deux astres ont le même astre attracteur. La période de la Terre, donnée dans l'énoncé, ne sert pas ici.

2.1.1 Définir le référentiel permettant d'étudier le mouvement de Dysnomia autour d'Éris.

Le référentiel a pour origine le centre d'Éris et ses trois axes pointent vers des étoiles lointaines considérées comme fixes (référentiel « ériscentrique »).

COMPRENDRE
C'est l'équivalent, pour Éris, du référentiel géocentrique pour la Terre : il ne tourne pas avec l'astre. Un référentiel lié au sol d'Éris ne conviendrait pas.

2.1.2 Établir l'expression du vecteur accélération $\vec{a}$ du centre d'inertie de Dysnomia en fonction des paramètres de l'énoncé et du vecteur unitaire $\vec{u}_{ED}$.

Système {Dysnomia}, de masse M_D constante ; référentiel ériscentrique supposé galiléen.

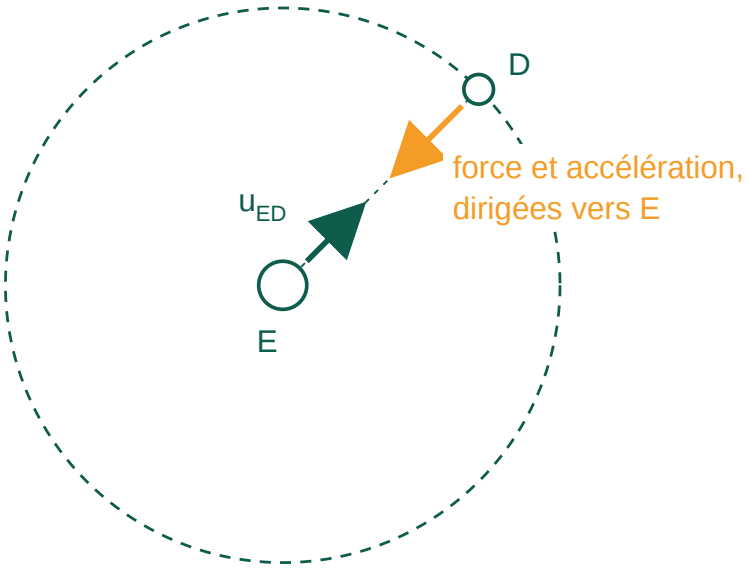
Seule force : l'attraction gravitationnelle d'Éris, $\overrightarrow{F}_{E/D} = -\dfrac{G\,M_E\,M_D}{R_D^2}\,\vec{u}_{ED}$.

Deuxième loi de Newton : $\overrightarrow{F}_{E/D} = M_D\,\vec{a}$, soit $-\dfrac{G\,M_E\,M_D}{R_D^2}\,\vec{u}_{ED} = M_D\,\vec{a}$.

$\vec{a} = -\dfrac{G\,M_E}{R_D^2}\,\vec{u}_{ED}$

PIÈGE
Oublier le signe « $-$ ». Le vecteur $\vec{u}_{ED}$ va de E vers D alors que la force attire Dysnomia vers Éris : force et accélération sont de sens opposé à $\vec{u}_{ED}$.

COMPRENDRE
La masse M_D se simplifie : l'accélération du satellite ne dépend pas de sa propre masse, seulement de celle de l'astre attracteur et de la distance.



2.1.2 · Schéma du sujet, complété par la force et l'accélération

2.1.3 Préciser la direction et le sens de ce vecteur accélération.

Le vecteur $\vec{a}$ est colinéaire à $\vec{u}_{ED}$ et de sens contraire (coefficient négatif).

Direction : la droite (ED), c'est-à-dire le rayon de l'orbite. Sens : de Dysnomia vers Éris. L'accélération est radiale et **centripète**.

2.1.4 Montrer que $T_D = 2\pi\sqrt{\dfrac{R_D^3}{G\,M_E}}$. Retrouve-t-on la troisième loi de Kepler ? Justifier.

Le mouvement est circulaire et uniforme : l'accélération est centripète, de valeur $a = \dfrac{v^2}{R_D}$.

D'après 2.1.2, $a = \dfrac{G\,M_E}{R_D^2}$. Donc $\dfrac{v^2}{R_D} = \dfrac{G\,M_E}{R_D^2}$, soit $v = \sqrt{\dfrac{G\,M_E}{R_D}}$.

En une période, Dysnomia parcourt le périmètre $2\pi R_D$ à la vitesse constante v :

$$T_D = \frac{2\pi R_D}{v} = 2\pi R_D\sqrt{\frac{R_D}{G\,M_E}} = 2\pi\sqrt{\frac{R_D^3}{G\,M_E}}$$

En élevant au carré : $\dfrac{T_D^2}{R_D^3} = \dfrac{4\pi^2}{G\,M_E}$.

$T_D = 2\pi\sqrt{\dfrac{R_D^3}{G\,M_E}}$; le rapport $\dfrac{T_D^2}{R_D^3}$ est une constante qui ne dépend que d'Éris : on retrouve la troisième loi de Kepler, le rayon du cercle jouant le rôle du demi-grand axe.

PIÈGE

Pour faire entrer R_D sous la racine, il faut l'écrire $\sqrt{R_D^2}$: on obtient R_D^3 au numérateur, pas R_D^2.

MÉTHODE

Orbite circulaire : 1) $a = \dfrac{v^2}{R}$ égalée à $\dfrac{GM}{R^2}$ donne v ; 2) $T = \dfrac{2\pi R}{v}$; 3) élever au carré pour isoler $\dfrac{T^2}{R^3}$.

2.2.1 Déduire de l'expression de T_D celle de la masse M_E d'Éris. Calculer sa valeur.

Données utiles $R_D = 3{,}60 \times 10^7$ m ; $T_D = 1{,}30 \times 10^6$ s ; $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ m$^3 \cdot$ kg$^{-1} \cdot$ s^{-2}

$$T_D^2 = \frac{4\pi^2 R_D^3}{G\,M_E} \text{ donc } M_E = \frac{4\pi^2 R_D^3}{G\,T_D^2}$$

$$M_E = \frac{4\pi^2 \times (3{,}60 \times 10^7)^3}{6{,}67 \times 10^{-11} \times (1{,}30 \times 10^6)^2}$$

$$\boxed{M_E = 1{,}63 \times 10^{22} \text{ kg}}$$

PIÈGE
La période doit être en secondes ($1{,}30 \times 10^6$ s, et non 15,0 jours) et le rayon en mètres. Ne pas oublier le cube sur R_D ni le carré sur T_D.

COMPRENDRE
Trois chiffres significatifs, comme chacune des données. Observer un satellite (rayon et période de son orbite) suffit à « peser » l'astre autour duquel il tourne.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$$\frac{4 \times \pi^2 \times (3.60 \times 10^7)^3}{6.67 \times 10^{-11} \times (1.30 \times 10^6)^2} \approx 1.63401 \times 10^{22}$$

2.2.2 Calculer le rapport $\frac{M_E}{M_P}$. Expliquer pourquoi la découverte d'Éris a remis en cause le statut de planète pour Pluton.

Données utiles $M_E = 1{,}63 \times 10^{22}$ kg (2.2.1) ; $M_P = 1{,}31 \times 10^{22}$ kg

$$\frac{M_E}{M_P} = \frac{1{,}63 \times 10^{22}}{1{,}31 \times 10^{22}} = 1{,}24$$

Éris est donc un peu plus massive que Pluton (environ 25 % de plus). Si Pluton est une planète, Éris, plus massive, devrait l'être aussi, ainsi que les astres similaires découverts à la même époque. Il fallait soit allonger la liste des planètes, soit retirer ce statut à Pluton.

$\frac{M_E}{M_P} \approx 1{,}24$: Éris est plus massive que Pluton, qui a donc été classée « planète naine », comme Éris.

COMPRENDRE
Avec la valeur non arrondie de M_E, le rapport vaut 1,25 : l'écart sur le dernier chiffre vient de l'arrondi intermédiaire. Les deux réponses sont acceptées, la conclusion est la même.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$$\frac{1.63 \times 10^{22}}{1.31 \times 10^{22}} \approx 1.244275$$