L'oscillateur élastique horizontal

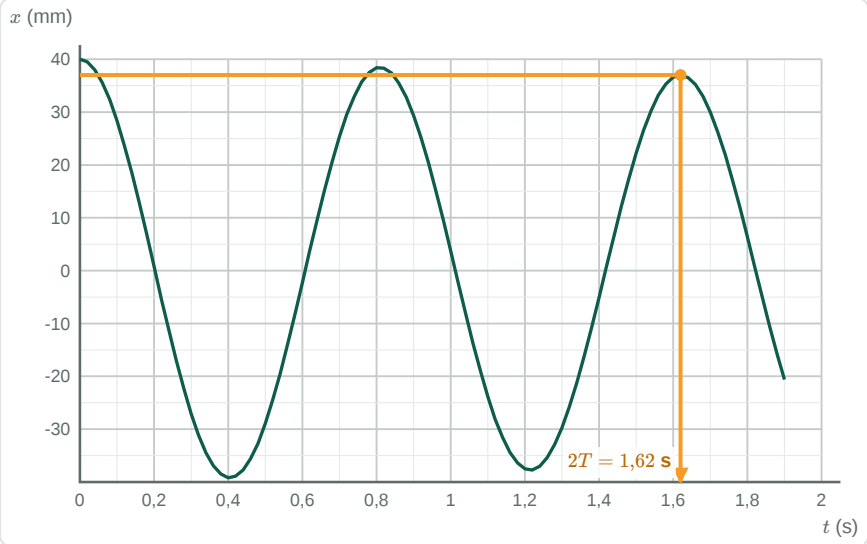
Bac S 2009 Liban (ancien programme) · Exercice 2 **4 points** **Durée conseillée 52 min**

1.1 Déterminer graphiquement la pseudo-période T de l'oscillateur à partir de la courbe 1.

Pour gagner en précision, on mesure deux pseudo-périodes : la courbe 1 part d'un maximum à $t = 0$ et atteint son deuxième maximum suivant à $t = 1{,}62$ s.

$2T = 1{,}62$ s, donc $T = \dfrac{1{,}62}{2}$

$T = 0{,}81$ s ; on prendra $T_0 = T = 0{,}81$ s.

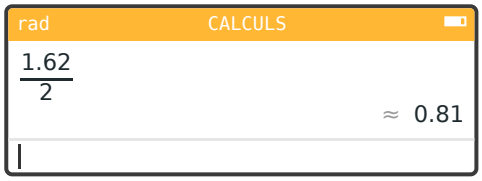


1.1 · Courbe 1 du sujet : deux pseudo-périodes entre $t = 0$ et le deuxième maximum

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs : la lecture graphique ne permet pas mieux. On parle de pseudo-période parce que l'amplitude diminue ; pour un amortissement faible, elle est très proche de la période propre.

MÉTHODE
Mesurer plusieurs périodes puis diviser : l'incertitude de lecture est partagée entre elles. Repérer des maximums ou des passages par zéro dans le même sens.

À LA CALCULATRICE



1.2 Montrer sans calcul que la grandeur énergétique de la courbe 2 ne peut être que l'énergie potentielle élastique E_{pe} du système {mobile + ressort}.

Le système possède une énergie cinétique $E_c = \dfrac{1}{2} m v^2$, une énergie potentielle élastique $E_{pe} = \dfrac{1}{2} k x^2$ et une énergie mécanique $E_m = E_c + E_{pe}$.

- À $t = 0$, $v_0 = 0$ donc $E_c = 0$: or la courbe 2 est maximale à cette date. Ce n'est pas l'énergie cinétique.
- La courbe 2 s'annule périodiquement, alors que l'énergie mécanique ne s'annule jamais pendant les oscillations. Ce n'est pas l'énergie mécanique.
- La courbe 2 est maximale quand $|x|$ est maximale ($t = 0$; 0,4 s ; 0,8 s) et nulle quand $x = 0$ ($t = 0{,}2$ s ; 0,6 s), comme $\dfrac{1}{2} k x^2$.

La courbe 2 représente l'énergie potentielle élastique E_{pe}.

PIÈGE
Écarter seulement l'énergie cinétique ne suffit pas : l'énergie mécanique est elle aussi non nulle à $t = 0$. Il faut un argument contre chacune des deux autres énergies.

2.1 À l'aide des courbes 1 et 2, montrer que la constante de raideur k du ressort vaut $3{,}0\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}$.

Données utiles à $t = 0$: $x_0 = 40\ \text{mm} = 4{,}0 \times 10^{-2}$ m (courbe 1) ; $E_{pe}(0) = 2{,}4\ \text{mJ} = 2{,}4 \times 10^{-3}$ J (courbe 2)

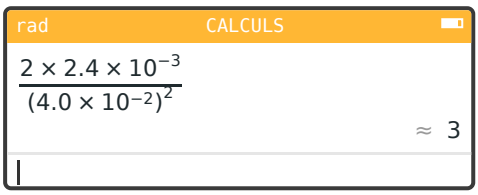
À $t = 0$: $E_{pe}(0) = \dfrac{1}{2} k x_0^2$, donc $k = \dfrac{2\,E_{pe}(0)}{x_0^2}$

$$k = \frac{2 \times 2{,}4 \times 10^{-3}}{(4{,}0 \times 10^{-2})^2}$$

$k = 3{,}0\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}$, valeur attendue.

PIÈGE
Laisser x_0 en millimètres ou E_{pe} en millijoules : la relation exige des mètres et des joules. Ne pas oublier le carré sur x_0.

À LA CALCULATRICE



2.2 Donner l'expression de la masse m du mobile en fonction de k et de T_0, puis calculer sa valeur.

Données utiles $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$; $k = 3{,}0\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}$ (2.1) ; $T_0 = 0{,}81$ s (1.1)

On élève l'expression de la période au carré : $T_0^2 = 4\pi^2 \dfrac{m}{k}$, donc

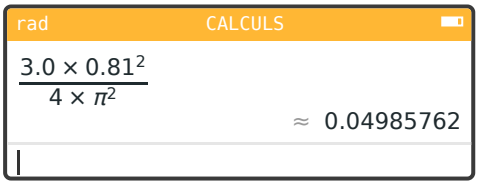
$$m = \frac{k\,T_0^2}{4\pi^2}$$

$$m = \frac{3{,}0 \times 0{,}81^2}{4\pi^2} = 5{,}0 \times 10^{-2}\ \text{kg}$$

$m = \dfrac{k\,T_0^2}{4\pi^2} = 5{,}0 \times 10^{-2}$ kg, soit 50 g.

MÉTHODE
Pour isoler une grandeur placée sous une racine, élever d'abord les deux membres au carré. Vérifier l'unité : $\text{N}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^2 = \text{kg}$.

À LA CALCULATRICE



3.1 Les forces de frottement sont-elles négligeables ? Justifier.

Sur la courbe 1, l'amplitude des oscillations diminue : 40 mm à $t = 0$, environ 37 mm deux pseudo-périodes plus tard. De même, les maximums de E_{pe} passent de 2,4 mJ à 2,0 mJ sur la courbe 2.

Le système perd de l'énergie mécanique au cours du temps : elle est dissipée par les frottements.

Les forces de frottement ne sont pas négligeables.

COMPRENDRE
Sans frottement, l'amplitude resterait égale à 40 mm et les maximums de E_{pe} à 2,4 mJ. L'amortissement reste faible : le régime est pseudo-périodique, ce qui autorise à confondre T et T_0.

3.2 Dessiner sur un même graphe, pour un oscillateur sans frottement, les allures des énergies potentielle élastique, cinétique et mécanique en fonction du temps, avec les conditions initiales de l'oscillateur étudié.

Données utiles $x_0 = 4{,}0$ cm ; $v_0 = 0$; $E_{pe}(0) = 2{,}4$ mJ (2.1)

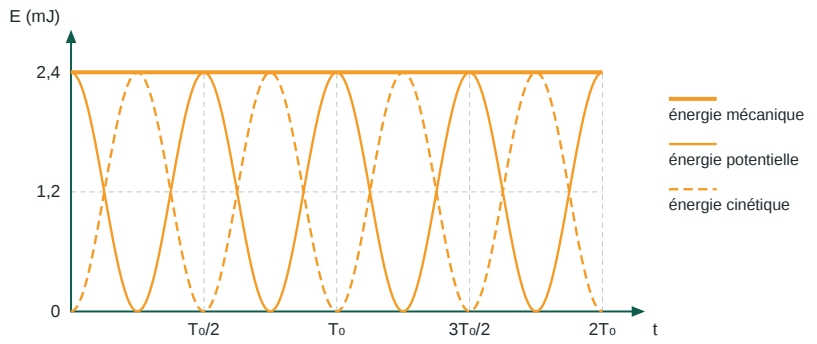
Conditions initiales : $E_c(0) = 0$ car $v_0 = 0$; $E_{pe}(0) = 2{,}4$ mJ.

Sans frottement, l'énergie mécanique se conserve : $E_m = E_c + E_{pe} = 2{,}4$ mJ à chaque instant. C'est une droite horizontale.

E_{pe} part de sa valeur maximale, E_c part de zéro. Quand l'une est maximale, l'autre est nulle ; elles se croisent à $\dfrac{E_m}{2} = 1{,}2$ mJ. Chacune s'annule deux fois par période du mouvement : leur période est $\dfrac{T_0}{2}$.

Voir le graphe : E_m constante à 2,4 mJ ; E_{pe} et E_c de période $\dfrac{T_0}{2}$, variant en sens contraires entre 0 et 2,4 mJ.

PIÈGE
Donner aux énergies la période T_0 du mouvement. Sur une durée T_0, le mobile atteint deux fois l'élongation maximale ($+x_0$ et $-x_0$) : E_{pe} présente donc deux maximums.



3.2 · Oscillateur sans frottement : E_m constante, E_{pe} et E_c de période $T_0/2$, en opposition

4.1 Établir l'équation différentielle vérifiée par l'abscisse $x(t)$ pour un oscillateur élastique horizontal sans frottement, en précisant le référentiel, les forces et la loi utilisée.

Système : le mobile, de masse m et de centre d'inertie G. Référentiel : terrestre (le laboratoire), supposé galiléen.

Forces exercées sur le mobile :

- son poids $\vec{P}$, vertical ;
- la réaction $\vec{R}$ du coussin d'air, verticale puisqu'il n'y a pas de frottement ;
- la force de rappel du ressort $\vec{F} = -k\,x\,\vec{i}$, où x est l'abscisse de G comptée depuis la position d'équilibre O.

Deuxième loi de Newton : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m\,\vec{a}$

En projection sur l'axe horizontal $(O, \vec{i})$, $\vec{P}$ et $\vec{R}$ ont une composante nulle : $-k\,x = m\,\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}\,x = 0$$

PIÈGE
Oublier le signe « $-$ » de la force de rappel. Elle ramène toujours le mobile vers O : sa composante est négative quand $x > 0$, positive quand $x < 0$.

MÉTHODE
Toujours le même ordre : système, référentiel galiléen, bilan des forces, deuxième loi de Newton, projection sur l'axe du mouvement.

4.2 Vérifier que $x(t) = x_0 \cos\left(\dfrac{2\pi t}{T_0}\right)$ est solution de cette équation différentielle.

On dérive deux fois par rapport au temps :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -x_0 \frac{2\pi}{T_0} \sin\left(\frac{2\pi t}{T_0}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -x_0 \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \cos\left(\frac{2\pi t}{T_0}\right) = -\frac{4\pi^2}{T_0^2}\, x(t)$$

Or $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ donne $T_0^2 = 4\pi^2 \dfrac{m}{k}$, soit $\dfrac{4\pi^2}{T_0^2} = \dfrac{k}{m}$. Donc :

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k}{m}\, x(t)$$

$\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{k}{m}\, x = 0$: la fonction proposée est bien solution.

PIÈGE

Dériver $\cos(a\,t)$ fait sortir le facteur $a = \dfrac{2\pi}{T_0}$ à chaque dérivation : il apparaît donc au carré dans la dérivée seconde.

COMPRENDRE

Cette solution respecte aussi les conditions initiales : $x(0) = x_0 \cos 0 = x_0$, et la vitesse $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, proportionnelle à un sinus, est nulle à $t = 0$.