De la Terre à la Lune

Bac S 2009 Métropole rattrapage (ancien programme) · Exercice 2 **5,5 points** **Durée conseillée 1 h 05**

1.1 Quel référentiel supposé galiléen peut-on choisir pour étudier le début du lancement ?

Le décollage se décrit par rapport au sol, sur une durée brève.

On choisit le **référentiel terrestre**, supposé galiléen pendant la durée de l'étude.

COMPRENDRE
Le référentiel géocentrique servira plus loin, pour le mouvement en orbite. Près du sol et pendant quelques secondes, la rotation de la Terre est sans effet mesurable : le référentiel terrestre suffit.

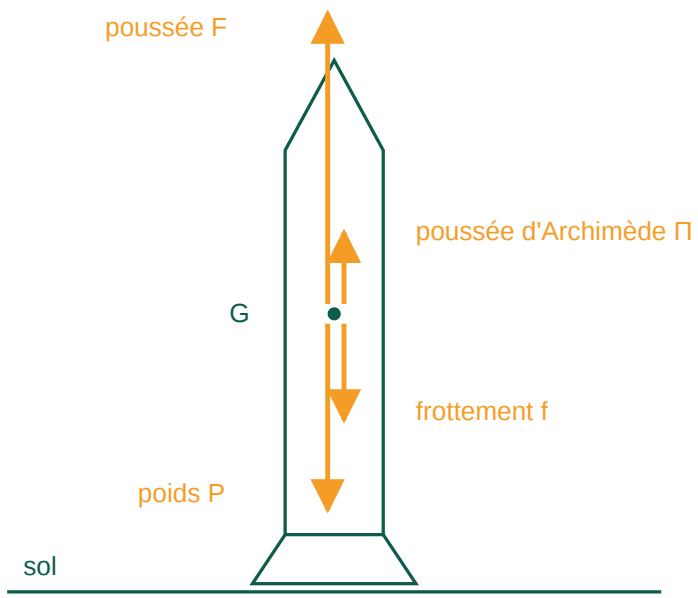
1.2 Faire l'inventaire des forces extérieures appliquées à la fusée, en tenant compte de l'interaction de l'air avec la fusée, et les représenter au centre d'inertie sur un schéma sans souci d'échelle (décollage vertical).

Système : {fusée}. Forces extérieures :

- le poids $\vec{P}$, vertical, vers le bas ;
- la poussée des réacteurs $\vec{F}$, verticale, vers le haut ;
- la force de frottement de l'air $\vec{f}$, verticale, opposée au mouvement donc vers le bas ;
- la poussée d'Archimède de l'air $\vec{\Pi}$, verticale, vers le haut.

Quatre forces verticales : $\vec{F}$ et $\vec{\Pi}$ vers le haut, $\vec{P}$ et $\vec{f}$ vers le bas (schéma ci-dessous).

PIÈGE
« Interaction de l'air » recouvre deux actions : le frottement et la poussée d'Archimède. N'en citer qu'une fait perdre une partie des points, même si la seconde est très faible devant le poids.



1.2 · Forces extérieures appliquées à la fusée au décollage (sans souci d'échelle)

1.3 Pourquoi ne peut-on pas appliquer la seconde loi de Newton, telle qu'elle est énoncée, à la fusée lors de son ascension ? Quelle hypothèse permet cependant de l'appliquer au tout début du lancement ?

L'énoncé de la loi suppose un solide de masse m **constante**. Or la fusée brûle et éjecte son carburant : le premier étage en consomme environ 2 000 tonnes en 180 s, sur une masse totale de $2{,}9 \times 10^3$ tonnes. Sa masse diminue fortement pendant l'ascension, la loi ainsi énoncée ne s'applique pas.

Hypothèse : sur une durée très courte au tout début du lancement, la masse éjectée est négligeable devant M ; on considère la masse de la fusée constante, égale à M.

COMPRENDRE
Pour un système de masse variable, il faut la forme générale de la loi, écrite avec la quantité de mouvement. Cette notion ne figure plus au programme actuel de spécialité.

1.4 En ne considérant que le poids et la poussée, montrer que l'accélération de la fusée à l'instant initial du lancement vaut $1{,}6\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Données utiles $F = 3{,}3 \times 10^7$ N ; $M = 2{,}9 \times 10^3$ t $= 2{,}9 \times 10^6$ kg ; $g = 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

Système {fusée} de masse M supposée constante, référentiel terrestre supposé galiléen. Seconde loi de Newton :

$$\vec{P} + \vec{F} = M\,\vec{a}$$

Projection sur un axe vertical (Oz) orienté vers le haut : $-M\,g + F = M\,a$, donc

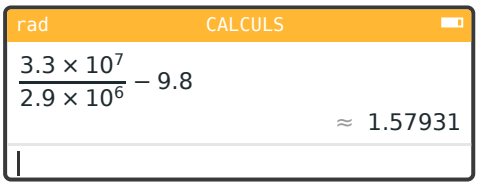
$$a = \frac{F}{M} - g = \frac{3{,}3 \times 10^7}{2{,}9 \times 10^6} - 9{,}8$$

$a = 1{,}6\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, valeur attendue.

PIÈGE
La masse est donnée en tonnes : $1\ \text{t} = 10^3$ kg. Avec $M = 2{,}9 \times 10^3$ kg, on trouverait une accélération mille fois trop grande.

COMPRENDRE
Les données ont deux chiffres significatifs : le résultat en garde deux. L'accélération est faible car la poussée dépasse à peine le poids ($Mg = 2{,}8 \times 10^7$ N) ; elle augmente ensuite, la masse diminuant.

À LA CALCULATRICE

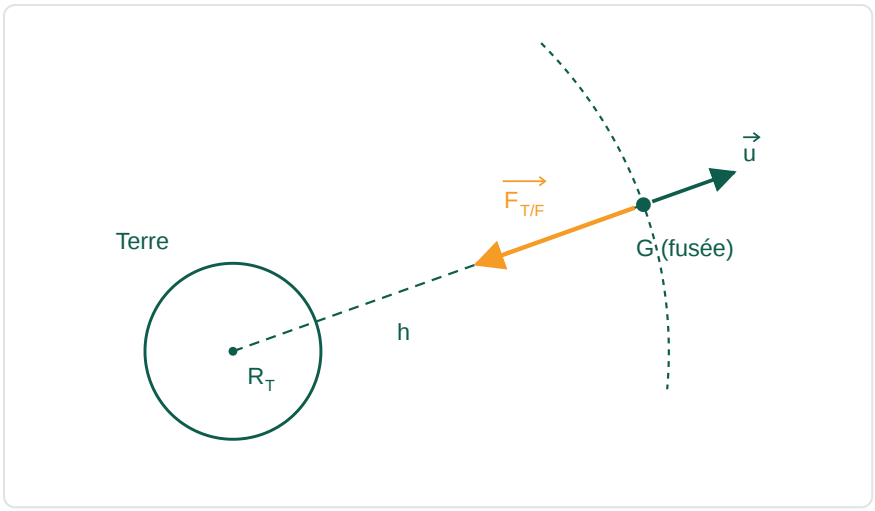


2.1 Donner l'expression vectorielle de la force $\overrightarrow{F}_{T/F}$ exercée par la Terre sur le système {fusée} à l'aide du vecteur unitaire $\vec{u}$ de la figure 6. Reproduire la figure et représenter cette force.

La distance entre le centre de la Terre et le point G est $R_T + h$. La force est attractive, dirigée de la fusée vers le centre de la Terre, donc de sens opposé à $\vec{u}$.

$$\overrightarrow{F}_{T/F} = -\frac{G\,M_T\,m}{(R_T + h)^2}\,\vec{u}$$

PIÈGE
Deux erreurs classiques : écrire h^2 au dénominateur (la distance se compte depuis le centre de la Terre) et oublier le signe « $-$ », alors que $\vec{u}$ pointe à l'opposé de la Terre.



2.1 · Figure 6 reproduite, avec la force exercée par la Terre (en orange)

2.2 Établir l'expression vectorielle de l'accélération du centre d'inertie du système {fusée}. Le mouvement étant supposé circulaire, montrer que le vecteur accélération est centripète, puis en déduire que le mouvement est uniforme.

Système {fusée} de masse m, référentiel géocentrique supposé galiléen, seule force $\vec{F}_{T/F}$. Deuxième loi de Newton : $\vec{F}_{T/F} = m\,\vec{a}$, soit

$$\vec{a} = -\frac{G\,M_T}{(R_T+h)^2}\,\vec{u}$$

Le vecteur $\vec{a}$ est colinéaire à $\vec{u}$ et de sens opposé : il est porté par le rayon de la trajectoire circulaire et dirigé vers son centre, le centre de la Terre. Il est donc **centripète**.

Pour un mouvement circulaire, la composante de $\vec{a}$ tangente à la trajectoire vaut $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$. Ici $\vec{a}$ est radial, cette composante est nulle.

$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$: la valeur de la vitesse est constante, le mouvement circulaire est **uniforme**.

PIÈGE
Dire « $\vec{a}$ est constant » est faux : sa direction change à chaque instant. Seule sa valeur est constante, et l'argument qui prouve l'uniformité est l'absence de composante tangentielle.

MÉTHODE
Schéma à retenir pour tout satellite en orbite circulaire : deuxième loi de Newton, accélération radiale, donc $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = 0$ (uniforme) et $a = v^2/r$ (vitesse).

2.3 Montrer que la valeur de la vitesse du centre d'inertie du système {fusée} est $v = \sqrt{\dfrac{G\,M_T}{R_T+h}}$, puis calculer sa valeur.

Données utiles $G = 6{,}67\times10^{-11}\ \mathrm{m^3\cdot s^{-2}\cdot kg^{-1}}$; $M_T = 5{,}98\times10^{24}$ kg ; $R_T = 6{,}37\times10^{6}$ m ; $h = 1{,}85\times10^{5}$ m

Pour un mouvement circulaire uniforme de rayon $R_T + h$, l'accélération centripète a pour valeur $a = \dfrac{v^2}{R_T+h}$.

D'après 2.2, $a = \dfrac{G\,M_T}{(R_T+h)^2}$. En égalant les deux expressions :

$$\frac{v^2}{R_T+h} = \frac{G\,M_T}{(R_T+h)^2} \quad \text{soit} \quad v = \sqrt{\frac{G\,M_T}{R_T+h}}$$

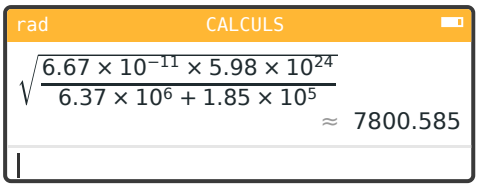
$$v = \sqrt{\frac{6{,}67\times10^{-11}\times5{,}98\times10^{24}}{6{,}37\times10^{6}+1{,}85\times10^{5}}}$$

$v = 7{,}80\times10^{3}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, soit $7{,}80\ \mathrm{km\cdot s^{-1}}$.

PIÈGE
R_T et h sont donnés en kilomètres : il faut les convertir en mètres avant de les additionner, sinon la vitesse obtenue est fausse d'un facteur $\sqrt{1000}$.

COMPRENDRE
La vitesse ne dépend pas de la masse m du système : à 185 km d'altitude, tout satellite en orbite circulaire va à $7{,}80\ \mathrm{km\cdot s^{-1}}$, soit environ 28 000 km/h.

À LA CALCULATRICE



3.1 Parmi l'iode 131, le plutonium 238 et le potassium 40, indiquer en justifiant le radioélément qui pourrait servir à mesurer l'âge de la Lune.

Données utiles demi-vies : iode 131, une dizaine de jours ; plutonium 238, une centaine d'années ; potassium 40, un milliard d'années

Un radioélément convient si sa demi-vie est de l'ordre de grandeur de l'âge à mesurer. La Lune, comme la Terre, est âgée de quelques milliards d'années.

Le **potassium 40** convient : sa demi-vie, de l'ordre du milliard d'années, est comparable à l'âge de la Lune.

COMPRENDRE
Avec l'iode 131 ou le plutonium 238, il se serait écoulé des millions de demi-vies : il ne resterait plus aucun noyau à compter dans la roche.

3.2 Écrire l'équation de désintégration nucléaire d'un noyau de potassium 40, qui produit de l'argon 40.

On note ${}^{A}_{Z}\mathrm{X}$ la particule émise. Conservation du nombre de nucléons : $40 = 40 + A$, donc $A = 0$. Conservation de la charge : $19 = 18 + Z$, donc $Z = 1$. La particule est un positon ${}^{0}_{1}\mathrm{e}$.

${}^{40}_{19}\mathrm{K} \longrightarrow {}^{40}_{18}\mathrm{Ar} + {}^{0}_{1}\mathrm{e}$ (radioactivité β^+)

PIÈGE
Le numéro atomique diminue d'une unité : la particule émise porte une charge positive. Écrire un électron ${}^{0}_{-1}\mathrm{e}$ ne respecte pas la conservation de la charge.

3.3 Donner l'expression du nombre $N_K(t)$ de noyaux de potassium 40 présents dans l'échantillon à la date t en fonction du nombre initial $N_K(0)$.

Loi de décroissance radioactive, avec λ la constante de désintégration radioactive du potassium 40 :

$$N_K(t) = N_K(0)\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$$

3.4 Définir le temps de demi-vie d'un échantillon radioactif, établir la relation entre λ et $t_{1/2}$, puis montrer que $\lambda = 5{,}50 \times 10^{-10}\ \mathrm{an}^{-1}$ pour le potassium 40.

Données utiles $t_{1/2} = 1{,}26 \times 10^{9}$ ans

Le temps de demi-vie $t_{1/2}$ est la durée au bout de laquelle la moitié des noyaux radioactifs initialement présents dans l'échantillon se sont désintégrés.

Donc $N_K(t_{1/2}) = \dfrac{N_K(0)}{2}$, soit $N_K(0)\,\mathrm{e}^{-\lambda t_{1/2}} = \dfrac{N_K(0)}{2}$.

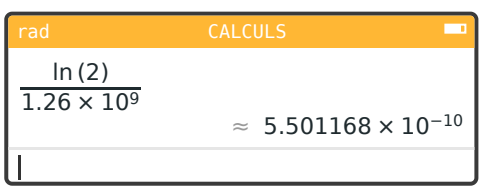
On simplifie : $\mathrm{e}^{-\lambda t_{1/2}} = \dfrac{1}{2}$, d'où $-\lambda\, t_{1/2} = -\ln 2$ et

$$\lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} = \frac{\ln 2}{1{,}26 \times 10^{9}}$$

$\lambda = 5{,}50 \times 10^{-10}\ \mathrm{an}^{-1}$, valeur attendue.

COMPRENDRE
Il est inutile de convertir en secondes : avec $t_{1/2}$ en années, λ sort en an^{-1}, unité demandée et commode pour la question suivante.

À LA CALCULATRICE



3.5 Sachant que $N_K(0) = N_K(t) + N_{Ar}(t)$, évaluer l'âge de la roche lunaire analysée.

Données utiles $N_{Ar}(t) = 2{,}3 \times 10^{17}$; $N_K(t) = 2{,}4 \times 10^{16}$; $\lambda = 5{,}50 \times 10^{-10}\ \text{an}^{-1}$ (3.4)

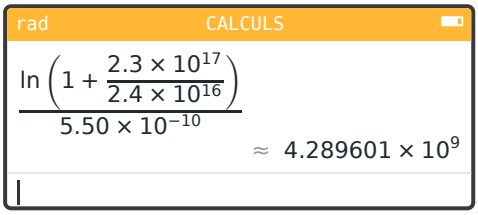
D'après 3.3 : $\dfrac{N_K(0)}{N_K(t)} = \text{e}^{\lambda t}$, donc $t = \dfrac{1}{\lambda}\ln\left(\dfrac{N_K(0)}{N_K(t)}\right)$.

Avec $N_K(0) = N_K(t) + N_{Ar}(t)$:

$$t = \frac{1}{\lambda}\ln\left(1 + \frac{N_{Ar}(t)}{N_K(t)}\right) = \frac{1}{5{,}50 \times 10^{-10}} \times \ln\left(1 + \frac{2{,}3 \times 10^{17}}{2{,}4 \times 10^{16}}\right)$$

$t = 4{,}3 \times 10^9$ ans : la roche lunaire est âgée d'environ 4,3 milliards d'années.

À LA CALCULATRICE



PIÈGE
Les deux nombres de noyaux n'ont pas la même puissance de dix (10^{17} et 10^{16}) : le rapport vaut 9,6 et non 0,96.

COMPRENDRE
Chaque noyau d'argon 40 provient d'un noyau de potassium 40 désintégré, d'où la relation admise. Le résultat est cohérent : un peu plus de trois demi-vies, et un âge voisin de celui du système solaire.