étude d'un oscillateur mécanique

Bac S 2009 La Réunion (ancien programme) · Exercice 1 **5 points** **Durée conseillée 1 h 05**

1.1 Calculer la valeur de la vitesse V_{G19} à la date t_{19} à partir du tableau de pointage.

Données utiles $x_{G18} = -0{,}046$ m ; $x_{G20} = 0{,}017$ m ; $t_{18} = 1{,}44$ s ; $t_{20} = 1{,}60$ s

La vitesse à la date t_{19} est assimilée à la vitesse moyenne entre les deux positions qui encadrent G_{19} :

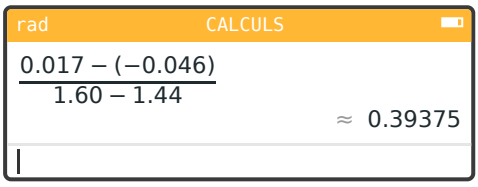
$$V_{G19} = \frac{x_{G20} - x_{G18}}{t_{20} - t_{18}} = \frac{0{,}017 - (-0{,}046)}{1{,}60 - 1{,}44}$$

$V_{G19} = 0{,}39 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

PIÈGE
Oublier que x_{G18} est négative : le mobile parcourt $0{,}063$ m entre les deux dates, et non $0{,}029$ m. La durée vaut $2\tau = 0{,}16$ s, pas τ.

COMPRENDRE
Le déplacement $0{,}063$ m n'a que deux chiffres significatifs : le résultat aussi. C'est la précision de $V_{G17} = 0{,}31 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ donnée par l'énoncé.

À LA CALCULATRICE



1.2 Exprimer le vecteur accélération $\vec{a}_{G18}$ en fonction de $\vec{V}_{G17}$, $\vec{V}_{G19}$ et de l'intervalle de temps, puis vérifier que sa valeur est $0{,}50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Données utiles $V_{G17} = 0{,}31 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $V_{G19} = 0{,}39 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (1.1) ; $\tau = 80$ ms

$$\vec{a}_{G18} = \frac{\vec{V}_{G19} - \vec{V}_{G17}}{t_{19} - t_{17}} = \frac{\vec{V}_{G19} - \vec{V}_{G17}}{2\tau}$$

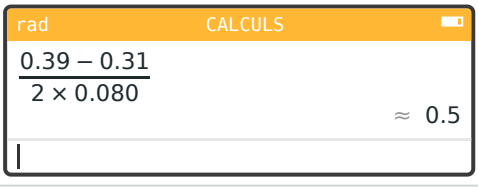
Les deux vecteurs vitesse ont la même direction et le même sens (le mobile va vers la droite), donc :

$$a_{G18} = \frac{V_{G19} - V_{G17}}{2\tau} = \frac{0{,}39 - 0{,}31}{2 \times 0{,}080}$$

$a_{G18} = 0{,}50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, valeur attendue.

COMPRENDRE
Avec la valeur non arrondie $0{,}394 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, on obtiendrait $0{,}52 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Une différence de deux valeurs proches est très sensible aux arrondis : l'énoncé attend le calcul avec $0{,}39$.

À LA CALCULATRICE



1.3 Représenter, sans souci d'échelle, les trois forces qui s'exercent sur le mobile sur la figure 1 de l'annexe (ressort comprimé, frottements négligés).

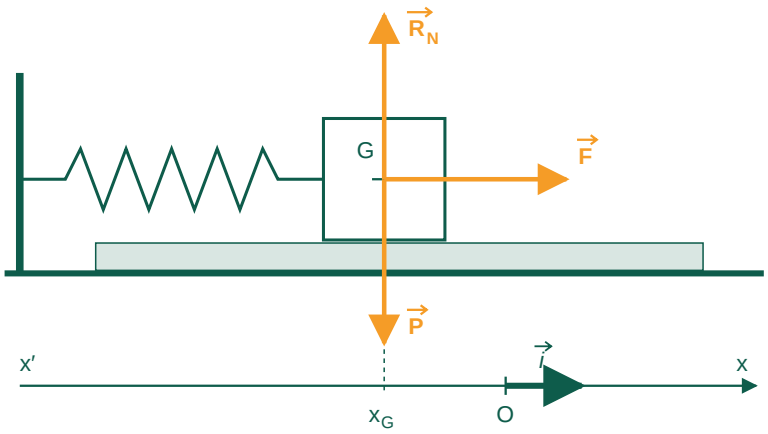
Système {mobile}, référentiel de la table (terrestre, supposé galiléen).
Le mobile est soumis à :

- son poids $\vec{P}$, vertical, vers le bas ;
- la réaction $\vec{R}_N$ de la table, verticale et vers le haut car il n'y a pas de frottements ;
- la force de rappel $\vec{F}$ du ressort, horizontale, vers la droite : un ressort comprimé repousse le mobile.

$\vec{P}$ vers le bas, $\vec{R}_N$ vers le haut, de même longueur, et $\vec{F}$ horizontale vers la droite (voir la figure).

PIÈGE
Dessiner $\vec{F}$ vers la gauche. Le ressort comprimé cherche à retrouver sa longueur à vide : il pousse le mobile vers O, donc ici vers la droite.

COMPRENDRE
Le mouvement est horizontal : les forces verticales se compensent, $\vec{P} + \vec{R}_N = \vec{0}$. Les deux flèches verticales doivent donc avoir la même longueur.



1.3 · Figure 1 de l'annexe complétée : les trois forces, tracées à partir de G

1.4 Choisir l'expression vectorielle de la force de rappel : $\vec{F} = K\,x_G\,\vec{i}$ ou $\vec{F} = -K\,x_G\,\vec{i}$.

Sur la figure 1, le ressort est comprimé : G est à gauche de O, donc $x_G < 0$, et la force $\vec{F}$ est dirigée vers la droite, dans le sens de $\vec{i}$.
La coordonnée de $\vec{F}$ sur l'axe doit donc être positive. Comme $K > 0$ et $x_G < 0$, c'est $-K\,x_G$ qui est positif.

$\vec{F} = -K\,x_G\,\vec{i}$

MÉTHODE
Pour trancher un signe, tester l'expression sur une situation dont on connaît le sens de la force. Vérification avec le ressort étiré : $x_G > 0$ et la force ramène le mobile vers la gauche, ce que donne bien $-K\,x_G < 0$.

1.5.1 En projetant la deuxième loi de Newton sur l'axe $x'x$, établir la relation entre K, m, x et a_x (équation 1).

Système {mobile} de masse m, référentiel de la table supposé galiléen. Deuxième loi de Newton :

$$\vec{P} + \vec{R}_N + \vec{F} = m\,\vec{a}_G$$

$\vec{P}$ et $\vec{R}_N$ sont perpendiculaires à l'axe : leur coordonnée sur $x'x$ est nulle. Celle de $\vec{F}$ vaut $-K\,x$.

$-K\,x = m\,a_x$ (équation 1)

COMPRENDRE
a_x et x sont toujours de signes contraires : l'accélération est dirigée vers la position d'équilibre O, quel que soit le côté où se trouve le mobile.

1.5.2 À partir de l'abscisse et de l'accélération à la date t_{18}, estimer la valeur de la constante de raideur K.

Données utiles $m = 0{,}714$ kg ; $x_{G18} = -0{,}046$ m ; $a_{G18} = 0{,}50\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ (1.2)

D'après l'équation 1 : $K = -\dfrac{m\,a_x}{x}$.

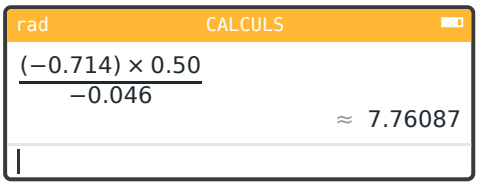
À la date t_{18}, $x < 0$: le ressort est comprimé et la vitesse augmente vers la droite, donc $a_x = +0{,}50\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

$$K = -\frac{0{,}714 \times 0{,}50}{-0{,}046}$$

$K = 7{,}8\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}$

PIÈGE
Perdre le signe de x_{G18} et trouver une raideur négative. K est toujours positive : un résultat négatif signale une erreur de signe.

À LA CALCULATRICE



2.1 Nommer les deux grandeurs X_m et φ_0 de l'équation horaire.

X_m est l'amplitude des oscillations (en m) ; φ_0 est la phase à l'origine des dates (en rad).

COMPRENDRE
X_m est l'abscisse maximale atteinte par G. φ_0 dépend des conditions initiales : elle est nulle seulement si le mobile est lâché sans vitesse depuis $x = X_m$.

2.2 Choisir l'expression correcte de la période propre parmi les trois proposées et justifier par une analyse dimensionnelle.

Dimension de K : d'après l'équation 1, $K = -\dfrac{m\,a_x}{x}$, donc

$$[K] = \frac{M \cdot L \cdot T^{-2}}{L} = M \cdot T^{-2}$$

- $\left[\sqrt{\dfrac{K}{m}}\right] = \left(\dfrac{M \cdot T^{-2}}{M}\right)^{1/2} = T^{-1}$: inverse d'une durée, à rejeter ;
- $\left[\sqrt{m \times K}\right] = \left(M^2 \cdot T^{-2}\right)^{1/2} = M \cdot T^{-1}$: à rejeter ;
- $\left[\sqrt{\dfrac{m}{K}}\right] = \left(\dfrac{M}{M \cdot T^{-2}}\right)^{1/2} = T$: c'est une durée.

Le facteur 2π est sans dimension.

$T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{K}}$

MÉTHODE
Exprimer d'abord la dimension de la grandeur inconnue (K) à partir d'une relation sûre, en M, L, T. Puis tester chaque formule : une seule doit donner la dimension cherchée.

2.3 À partir de la période mesurée, déduire une nouvelle estimation de K.

Données utiles $T_0 = 1{,}88$ s ; $m = 0{,}714$ kg

$T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{K}}$ donne, en élevant au carré, $T_0^2 = \dfrac{4\pi^2\,m}{K}$, d'où

$$K = \frac{4\pi^2\,m}{T_0^2} = \frac{4\pi^2 \times 0{,}714}{1{,}88^2}$$

$K = 7{,}98\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}$, valeur proche de celle de la question 1.5.2 ($7{,}8\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}$).

COMPRENDRE
Cette estimation est plus précise : m et T_0 sont connues avec trois chiffres significatifs, alors que le calcul de 1.5.2 repose sur une accélération à deux chiffres, obtenue par différences de valeurs pointées.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\dfrac{4 \times \pi^2 \times 0.714}{1.88^2}$

$\approx$ 7.975212

3.1 Vérifier, avec la modélisation, que l'abscisse x_{G0} à la date $t_0 = 0$ s vaut 10,6 cm.

Données utiles $x_G(t) = a\cos(bt + c)$ avec $a = 0{,}120$ m ; $b = 3{,}34$ rad · s^{-1} ; $c = -0{,}488$ rad

$$x_{G0} = x_G(0) = a\cos(c) = 0{,}120 \times \cos(-0{,}488) = 0{,}106 \text{ m}$$

$x_{G0} = 0{,}106$ m $= 10{,}6$ cm, valeur attendue.

PIÈGE
Calculatrice restée en degrés : on trouve alors 0,120 m. L'angle c est en radians, il faut régler la calculatrice en mode radian.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$0.120 \times \cos(-0.488)$

$\approx$ 0.1059927

3.2 Montrer que la vitesse s'écrit $V_G(t) = -0{,}401\ \sin(3{,}34\,t - 0{,}488)$ en m · s^{-1}.

Données utiles $a = 0{,}120$ m ; $b = 3{,}34$ rad · s^{-1} ; $c = -0{,}488$ rad

La vitesse est la dérivée de l'abscisse par rapport au temps :

$$V_G(t) = \frac{\mathrm{d}x_G}{\mathrm{d}t} = -a\,b\,\sin(b\,t + c)$$

avec $a\,b = 0{,}120 \times 3{,}34 = 0{,}401$ m · s^{-1}.

$V_G(t) = -0{,}401\ \sin(3{,}34\,t - 0{,}488)$ en m · s^{-1}, expression attendue.

MÉTHODE
La dérivée de $\cos(bt + c)$ est $-b\,\sin(bt + c)$: le cosinus devient « moins sinus » et le coefficient de t sort en facteur.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

0.120×3.34

$\approx$ 0.4008

3.3 Calculer la vitesse initiale V_{G0} communiquée au mobile et préciser dans quel sens elle l'a été.

Données utiles $V_G(t) = -0{,}401\ \sin(3{,}34\,t - 0{,}488)$ (3.2)

$$V_{G0} = V_G(0) = -0{,}401 \times \sin(-0{,}488) = 0{,}188 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$V_{G0} > 0$: le vecteur vitesse initiale a le sens de $\vec{i}$.

$V_{G0} = 0{,}188$ m · s^{-1} ; le mobile a été lancé vers la droite.

COMPRENDRE
À t_0, le mobile est à droite de O ($x_{G0} > 0$) et part vers la droite : il s'éloigne d'abord de sa position d'équilibre. La courbe de la figure 2 commence donc par monter jusqu'à 0,120 m.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$(-0.401) \times \sin(-0.488)$

$\approx$ 0.188013

3.4.1 Donner l'expression de l'énergie mécanique E_m du système {mobile + ressort} en fonction de K, m, x_G et V_G.

L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique du mobile et de l'énergie potentielle élastique du ressort (sa masse est négligeable) :

$$E_m = \frac{1}{2} m V_G^2 + \frac{1}{2} K x_G^2$$

COMPRENDRE
Le mouvement est horizontal : l'énergie potentielle de pesanteur reste constante, on la choisit nulle au niveau de la table. Elle n'apparaît donc pas dans E_m.

3.4.2 À partir de la valeur de l'énergie mécanique à la date t_{17} et du tableau, retrouver la valeur de la constante de raideur K.

Données utiles $E_m = 5{,}6 \times 10^{-2}$ J ; $V_{G17} = 0{,}31$ m · s^{-1} ; $x_{G17} = -0{,}073$ m ; $m = 0{,}714$ kg

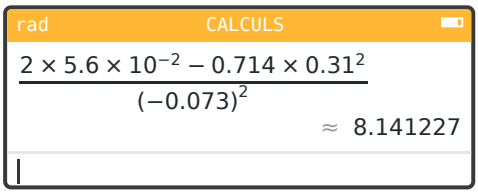
$2\,E_m = m\,V_G^2 + K\,x_G^2$, d'où

$$K = \frac{2\,E_m - m\,V_{G17}^2}{x_{G17}^2} = \frac{2 \times 5{,}6 \times 10^{-2} - 0{,}714 \times 0{,}31^2}{(-0{,}073)^2}$$

$K = 8{,}1$ N · m^{-1}, en accord avec les deux estimations précédentes (7,8 et 7,98 N · m^{-1}).

PIÈGE
Oublier le facteur 2 devant E_m, ou ne pas élever x_{G17} au carré. Le carré fait disparaître le signe de l'abscisse.

À LA CALCULATRICE



3.4.3 L'énergie mécanique du système se conserve-t-elle sur la durée de l'enregistrement ? Justifier sans calcul.

Sur la figure 2, l'amplitude des oscillations reste la même pendant tout l'enregistrement : la courbe remonte à chaque fois à la même abscisse maximale. Les oscillations ne sont pas amorties, donc les frottements sont négligeables.

Aux positions extrêmes, la vitesse est nulle et $E_m = \frac{1}{2} K X_m^2$: une amplitude constante signifie une énergie mécanique constante.

Oui, l'énergie mécanique se conserve sur la durée de l'enregistrement.

COMPRENDRE
Au cours du mouvement, l'énergie passe sans perte de la forme cinétique à la forme potentielle élastique et inversement. Avec des frottements, l'amplitude diminuerait d'une oscillation à la suivante.