# Record de saut en longueur à moto

Bac S 2009 Polynésie rattrapage (ancien programme) · Exercice 3 **6 points** **Durée conseillée 1 h 18**

**1.1** Exprimer les valeurs des vitesses $v_2$ et $v_4$ du centre d'inertie G aux points $G_2$ et $G_4$, puis les calculer.

**Données utiles** $\tau = 0{,}800$ s ; échelle de l'annexe : 1 cm pour 2 m

La vitesse en un point est assimilée à la vitesse moyenne entre les deux positions qui l'encadrent :

$$v_2 = \frac{G_1G_3}{2\tau} \qquad v_4 = \frac{G_3G_5}{2\tau}$$

Sur l'annexe, $G_1G_3 = 6{,}4$ cm, soit $6{,}4 \times 2 = 12{,}8$ m en réalité ; $G_3G_5 = 12{,}8$ cm, soit 25,6 m.

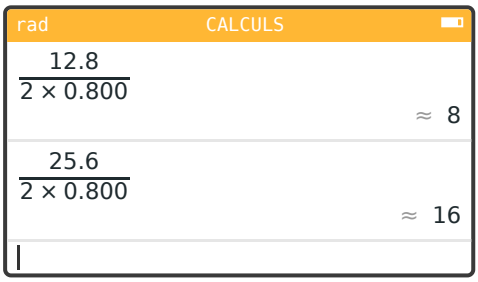
$$v_2 = \frac{12{,}8}{2 \times 0{,}800} = 8{,}0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \qquad v_4 = \frac{25{,}6}{2 \times 0{,}800} = 16 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$v_2 = 8{,}0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $v_4 = 16 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

**PIÈGE**
Diviser par $\tau$ au lieu de $2\tau$ : entre $G_1$ et $G_3$ il s'écoule deux intervalles de temps. Penser aussi à convertir les centimètres mesurés en mètres réels avec l'échelle.

**COMPRENDRE**
Une longueur mesurée à la règle est connue au millimètre près : on garde deux chiffres significatifs pour les vitesses, même si $\tau$ en compte trois.

**À LA CALCULATRICE**




**1.2** Représenter les vecteurs vitesse $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_4$ sur l'annexe, à l'échelle 1 cm pour 2 m·s⁻¹.

**Données utiles** $v_2 = 8{,}0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $v_4 = 16 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (1.1)

Chaque vecteur a pour origine le point considéré, pour direction celle de la trajectoire (rectiligne) et pour sens celui du mouvement.

Longueurs : $\frac{8{,}0}{2} = 4{,}0$ cm pour $\vec{v}_2$ et $\frac{16}{2} = 8{,}0$ cm pour $\vec{v}_4$.

$\vec{v}_2$ : flèche de 4,0 cm partant de $G_2$ ; $\vec{v}_4$ : flèche de 8,0 cm partant de $G_4$, toutes deux vers $G_5$.




**1.2** · Annexe complétée : vecteurs vitesse en $G_2$ et $G_4$ (échelle 1 cm pour 2 m·s⁻¹)

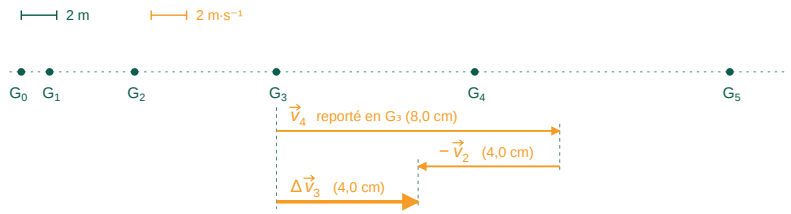
**1.3** Représenter sur l'annexe le vecteur $\Delta\vec{v}_3 = \vec{v}_4 - \vec{v}_2$.

À partir de $G_3$, on reporte $\vec{v}_4$, puis on place à son extrémité le vecteur $-\vec{v}_2$ (même longueur que $\vec{v}_2$, sens opposé). Le vecteur $\Delta\vec{v}_3$ relie $G_3$ à l'extrémité obtenue.

Les deux vitesses ont même direction et même sens : la longueur de $\Delta\vec{v}_3$ vaut $8{,}0 - 4{,}0 = 4{,}0$ cm.

$\Delta\vec{v}_3$ : flèche de 4,0 cm partant de $G_3$, dans le sens du mouvement.

**MÉTHODE**
Soustraire un vecteur, c'est ajouter son opposé : on met bout à bout $\vec{v}_4$ et $-\vec{v}_2$. Le vecteur obtenu se trace au point d'indice intermédiaire, ici $G_3$.




**1.3** · Construction de $\Delta\vec{v}_3 = \vec{v}_4 - \vec{v}_2$ à partir de $G_3$ (flèches décalées vers le bas pour la lisibilité)

**1.4** Donner l'expression du vecteur accélération $\vec{a}_3$ au point $G_3$, puis calculer sa valeur.

**Données utiles** $\Delta\vec{v}_3$ mesure 4,0 cm (1.3) ; échelle : 1 cm pour 2 m·s$^{-1}$ ; $\tau = 0{,}800$ s

$$\vec{a}_3 = \frac{\Delta\vec{v}_3}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_4 - \vec{v}_2}{2\tau}$$

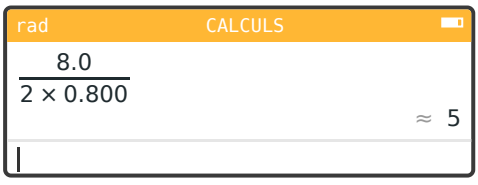
Avec l'échelle des vitesses : $\Delta v_3 = 4{,}0 \times 2 = 8{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

$$a_3 = \frac{\Delta v_3}{2\tau} = \frac{8{,}0}{2 \times 0{,}800}$$

$a_3 = 5{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

**COMPRENDRE**
$\vec{a}_3$ a la direction et le sens de $\Delta\vec{v}_3$ : il pointe dans le sens du mouvement, ce qui traduit une vitesse qui augmente.

**À LA CALCULATRICE**




**1.5.1** Montrer que la courbe de la figure 2 permet d'affirmer que la valeur de l'accélération est constante.

La courbe $v(t)$ est une droite passant par l'origine : $v = k\,t$, avec $k$ constant.

Le mouvement étant rectiligne, la valeur de l'accélération est $a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$, c'est-à-dire le coefficient directeur de cette droite.

$a = k$ : le coefficient directeur d'une droite est constant, donc l'accélération l'est aussi.

**1.5.2** Estimer, à l'aide de la figure 2, la valeur de l'accélération du motard. Vérifier la compatibilité avec la valeur calculée en 1.4.

**Données utiles** droite passant par $(0\ ;\ 0)$ et $(10\ \text{s}\ ;\ 50\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1})$ ; $a_3 = 5{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ (1.4)

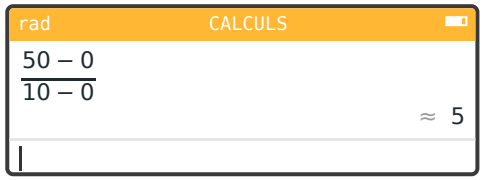
L'accélération est le coefficient directeur de la droite :

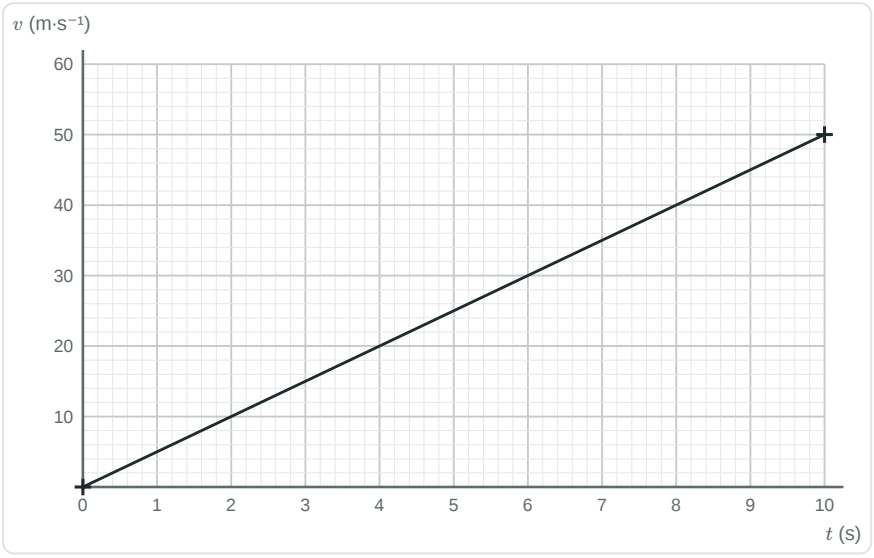
$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{50 - 0}{10 - 0} = 5{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

$a = 5{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ : même valeur qu'en 1.4, les deux déterminations sont compatibles.

**MÉTHODE**
Pour un coefficient directeur, choisir deux points de la droite éloignés l'un de l'autre et placés sur des croisements du quadrillage : la lecture est plus précise.

**À LA CALCULATRICE**




**1.5.2** · Figure 2 du sujet : points utilisés pour le coefficient directeur

**1.5.3** À l'aide des figures 2 et 3, déterminer la distance parcourue par le motard lorsqu'il a atteint la vitesse de 160 km·h⁻¹.

Conversion : $v = \frac{160}{3{,}6} = 44{,}4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Figure 2 : la droite atteint l'ordonnée $44{,}4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ à la date $t \approx 8{,}9$ s.

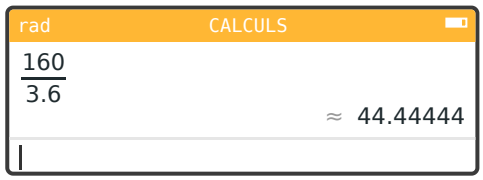
Figure 3 : à la date $t \approx 8{,}9$ s, la courbe donne une distance proche de 200 m.

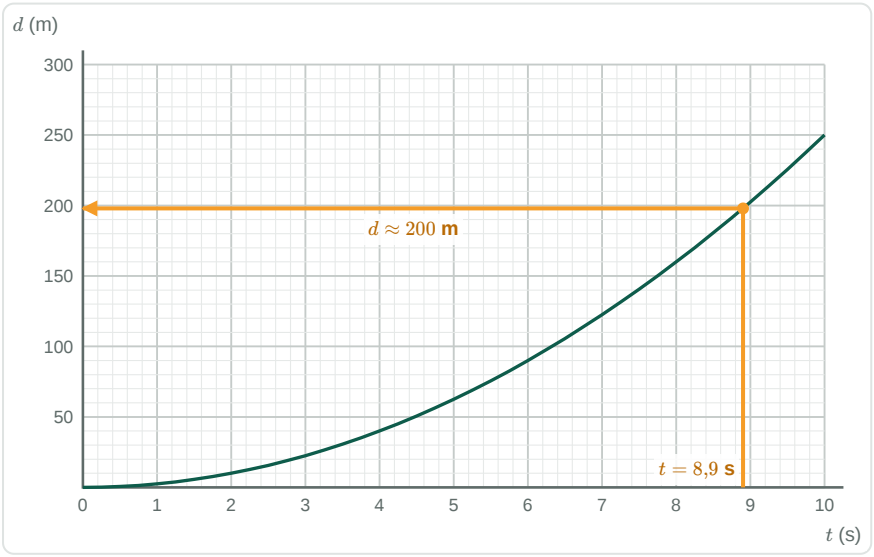
$d \approx 2{,}0 \times 10^2$ m

**PIÈGE**
Lire la figure 2 avec 160 sans convertir : l'axe est gradué en m·s⁻¹. On divise par 3,6 pour passer des km·h⁻¹ aux m·s⁻¹.

**COMPRENDRE**
Deux lectures graphiques successives : le résultat n'est fiable qu'à quelques mètres près, d'où deux chiffres significatifs.

**À LA CALCULATRICE**




**1.5.3** · Figure 3 du sujet : lecture de la distance à la date $t \approx 8{,}9$ s

**2.1** Exprimer l'énergie mécanique du système en fonction, entre autres, de la valeur $v$ de la vitesse instantanée et de l'altitude $z$.

L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle de pesanteur. Avec $E_{PP} = 0$ en $z_B = 0$ et l'axe $(Oz)$ vertical orienté vers le haut :

$$E_M = E_C + E_{PP} = \frac{1}{2} m v^2 + m g z$$

**2.2** Exprimer la variation d'énergie potentielle de pesanteur du système entre B et C en fonction de $m$, $g$, $BC$ et $\alpha$. La calculer.

**Données utiles** $m = 180$ kg ; $g = 9{,}81\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ ; $BC = 7{,}86$ m ; $\alpha = 27^\circ$

$\Delta E_{PP} = E_{PP}(C) - E_{PP}(B) = m g z_C - 0$

Dans le triangle rectangle BOC : $\sin\alpha = \dfrac{OC}{BC}$, donc $z_C = OC = BC \sin\alpha$.

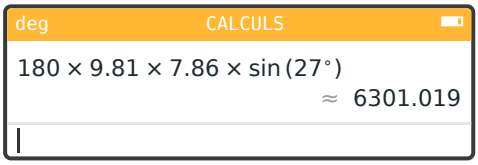
$$\Delta E_{PP} = m g BC \sin\alpha = 180 \times 9{,}81 \times 7{,}86 \times \sin(27^\circ)$$

$$\Delta E_{PP} = 6{,}3 \times 10^3 \text{ J}$$

**PIÈGE**
Calculatrice en radians, ou $\cos\alpha$ à la place de $\sin\alpha$ : la hauteur $OC$ est le côté opposé à l'angle $\alpha$.

**COMPRENDRE**
L'angle $\alpha = 27^\circ$ n'a que deux chiffres significatifs : le résultat aussi.

**À LA CALCULATRICE**




**2.3** En déduire, en justifiant, comment évolue l'énergie mécanique du système lorsqu'il passe de B à C.

**Données utiles** $\Delta E_{PP} = 6{,}3 \times 10^3$ J (2.2)

La vitesse garde la même valeur de B à C : l'énergie cinétique ne varie pas, $\Delta E_C = 0$.

$\Delta E_M = \Delta E_C + \Delta E_{PP} = \Delta E_{PP} > 0$

L'énergie mécanique augmente de B à C, de $6{,}3 \times 10^3$ J.

**COMPRENDRE**
L'énergie mécanique ne se conserve pas ici : le moteur fournit, par l'intermédiaire de la force motrice, l'énergie nécessaire pour monter sans ralentir.

**3.1** En appliquant la deuxième loi de Newton, montrer que les équations horaires du mouvement de G sont $x(t) = (v_0 \cos\alpha)\,t$ et $z(t) = -\dfrac{1}{2}\,g\,t^2 + (v_0 \sin\alpha)\,t + h$.

Système {motard + moto}, de masse $m$ constante ; référentiel terrestre supposé galiléen ; seule force : le poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$.

Deuxième loi de Newton : $m\,\vec{g} = m\,\vec{a}$, donc $\vec{a} = \vec{g}$, soit $a_x = 0$ et $a_z = -g$.

Comme $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$, on cherche les primitives : $v_x = C_1$ et $v_z = -g\,t + C_2$.
À $t = 0$, $\vec{v} = \vec{v}_0$ : $C_1 = v_0 \cos\alpha$ et $C_2 = v_0 \sin\alpha$.

$$v_x = v_0 \cos\alpha \qquad v_z = -g\,t + v_0 \sin\alpha$$

Comme $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OG}}{\mathrm{d}t}$, on intègre de nouveau : $x = (v_0 \cos\alpha)\,t + C_3$ et $z = -\dfrac{1}{2}\,g\,t^2 + (v_0 \sin\alpha)\,t + C_4$. À $t = 0$, G est en C$(0\,;\,h)$ : $C_3 = 0$ et $C_4 = h$.

$$\boxed{x(t) = (v_0 \cos\alpha)\,t \text{ et } z(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + (v_0 \sin\alpha)\,t + h}$$

**PIÈGE**
Oublier les constantes d'intégration, ou écrire $z(0) = 0$ : à l'instant initial G est en C, à la hauteur $h$ au-dessus de O.

**MÉTHODE**
Toujours le même enchaînement : système, référentiel, forces ; deuxième loi de Newton ; coordonnées de $\vec{a}$ ; primitives avec la vitesse initiale ; primitives avec la position initiale.

**3.2** Montrer que l'équation de la trajectoire est $z(x) = -\dfrac{g}{2\,v_0^2 \cos^2\alpha}\,x^2 + (\tan\alpha)\,x + h$.

On élimine le temps : $x = (v_0 \cos\alpha)\,t$ donne $t = \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha}$, que l'on reporte dans $z(t)$ :

$$z = -\frac{1}{2}\,g\left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + v_0 \sin\alpha \times \frac{x}{v_0 \cos\alpha} + h$$

Or $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$, d'où :

$$\boxed{z(x) = -\frac{g}{2\,v_0^2 \cos^2\alpha}\,x^2 + (\tan\alpha)\,x + h}$$

**COMPRENDRE**
$z$ est un polynôme du second degré en $x$, de coefficient dominant négatif : la trajectoire est une portion de parabole tournée vers le bas.

**3.3** À quelle distance maximale de C doit se trouver le point D pour que « l'atterrissage » se fasse sur le tremplin ?

**Données utiles** $v_0 = 160\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1} = 44{,}4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ; $\alpha = 27^\circ$ ; $g = 9{,}81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

D est à la même hauteur $h$ que C. La distance maximale est celle pour laquelle la trajectoire passe juste en D : $z(x_D) = h$.

$$-\frac{g}{2\,v_0^2 \cos^2\alpha}\,x_D^2 + (\tan\alpha)\,x_D + h = h$$

En factorisant : $x_D\left(\tan\alpha - \dfrac{g\,x_D}{2\,v_0^2 \cos^2\alpha}\right) = 0$.

La solution $x_D = 0$ correspond au point de départ C. L'autre solution est :

$$x_D = \frac{2\,v_0^2 \cos^2\alpha\,\tan\alpha}{g} = \frac{2\,v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$$

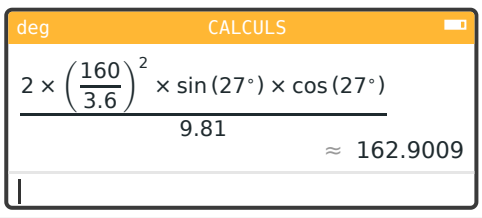
$$x_D = \frac{2 \times 44{,}4^2 \times \sin(27^\circ) \times \cos(27^\circ)}{9{,}81} = 163\ \text{m}$$

$$\boxed{CD_{\max} \approx 1{,}6 \times 10^2\ \text{m}}$$

**PIÈGE**
Résoudre $z = 0$ : cela donnerait l'arrivée au niveau du sol. Le tremplin de réception est à la hauteur $h$, et $h$ disparaît du calcul.

**COMPRENDRE**
Comme $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin(2\alpha)$, on retrouve la portée $\dfrac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$ d'un tir dont l'arrivée est à la même altitude que le départ.

**À LA CALCULATRICE**



**3.4** Comparer cette valeur avec celle donnée dans l'énoncé. Comment peut-on interpréter cet écart ?

**Données utiles** portée réelle du saut : 107 m ; $CD_{\max} \approx 1{,}6 \times 10^2$ m (3.3)

La portée calculée, environ 160 m, dépasse nettement la portée réelle de 107 m : elle est une fois et demie plus grande.

Le modèle ne retient que le poids. À $160\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$, les frottements de l'air sur le motard et sa moto ne sont pas négligeables : ils freinent le système pendant tout le vol et raccourcissent le saut.

$1{,}6 \times 10^2\ \mathrm{m} > 107\ \mathrm{m}$ : l'écart s'explique par les frottements de l'air, négligés dans le modèle.

À LA CALCULATRICE

