Etude d'une bobine par différentes méthodes

Bac S 2009 Antilles-Guyane rattrapage (ancien programme) · Exercice 4 **5,5 points** **Durée conseillée 1 h 05**

1.1 Quel est le phénomène observé sur le document 1 ?

La tension u change régulièrement de signe et son amplitude diminue au cours du temps, alors que le générateur n'est plus dans le circuit.

Le condensateur se décharge dans la bobine : ce sont des **oscillations électriques libres amorties** (régime pseudo-périodique).

COMPRENDRE
« Libres » : aucun générateur n'entretient les oscillations. « Amorties » : la résistance r de la bobine fait décroître l'amplitude.

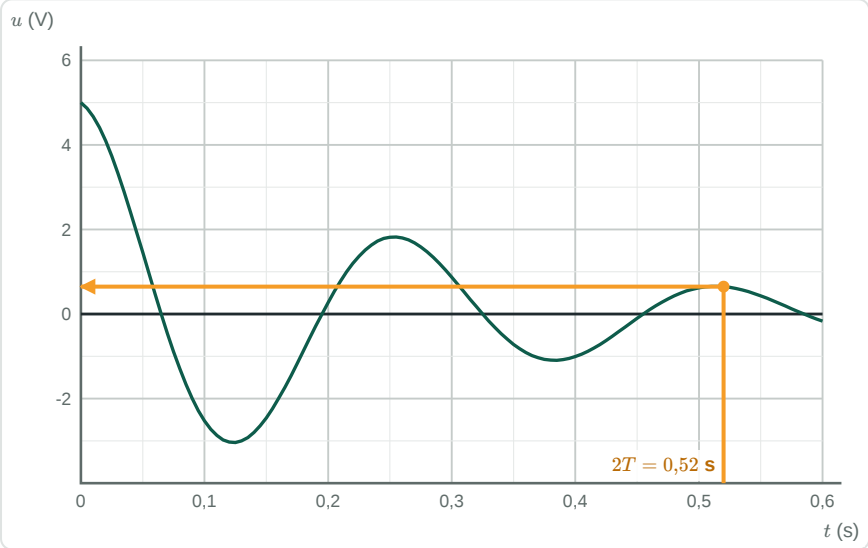
1.2 Déterminer graphiquement la pseudo-période T de la tension.

On mesure la durée de deux pseudo-périodes, entre le maximum de la date $t = 0$ et le deuxième maximum suivant, à $t = 0{,}52$ s :

$2T = 0{,}52$ s, donc $T = \dfrac{0{,}52}{2}$

$T = 0{,}26$ s

MÉTHODE
Mesurer plusieurs pseudo-périodes puis diviser : l'erreur de lecture est divisée d'autant. Repérer des points nets de la courbe (maximums ou passages par zéro dans le même sens).



1.2 · Document 1 : deux pseudo-périodes entre $t = 0$ et le deuxième maximum

1.3 En assimilant la pseudo-période à la période propre T_0, calculer la valeur L de l'inductance de la bobine.

Données utiles $C = 2200\ \mu$F ; $T = 0{,}26$ s (1.2)

Période propre d'un circuit LC : $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$.

En élevant au carré : $T_0^2 = 4\pi^2 LC$, d'où $L = \dfrac{T_0^2}{4\pi^2 C}$.

$$L = \frac{0{,}26^2}{4\pi^2 \times 2200 \times 10^{-6}} = 0{,}78\ \text{H}$$

$L = 0{,}78$ H, soit 780 mH : valeur bien comprise entre 600 et 900 mH.

PIÈGE
Laisser la capacité en microfarads : $C = 2200 \times 10^{-6}$ F. Ne pas oublier non plus d'élever T_0 et 2π au carré.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme T lue sur le graphique. Le résultat se contrôle avec l'encadrement annoncé par l'énoncé.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$$\frac{0.26^2}{4 \times \pi^2 \times 2200 \times 10^{-6}} \approx 0.7783309$$

2.1 Rappeler les expressions littérales des énergies E_C et E_B en fonction de L, C, u et i.

Énergie emmagasinée dans le condensateur : $E_C = \frac{1}{2} C u^2$.

Énergie emmagasinée dans la bobine : $E_B = \frac{1}{2} L i^2$.

$E_C = \frac{1}{2} C u^2$ et $E_B = \frac{1}{2} L i^2$

2.2 En déduire l'expression de l'énergie E_T du circuit, en fonction de L, C, u et i.

L'énergie totale est la somme des deux énergies : $E_T = E_C + E_B$.

$E_T = \frac{1}{2} C u^2 + \frac{1}{2} L i^2$

2.3 Identifier sur le document 4 les courbes donnant l'évolution de E_B, E_C et E_T. Justifier.

- La résistance du circuit est nulle : aucune énergie n'est dissipée, E_T reste constante. C'est la **courbe 1** (droite horizontale).
- À $t = 0$, le condensateur est chargé ($u = 5{,}0$ V, document 2) : E_C est maximale. C'est la **courbe 3**, qui part de sa valeur maximale.
- À $t = 0$, l'intensité est nulle (document 3) : $E_B = 0$. C'est la **courbe 2**, qui part de zéro.

Courbe 1 : E_T ; courbe 2 : E_B ; courbe 3 : E_C.

MÉTHODE
Pour attribuer des courbes d'énergie, regarder la date $t = 0$: condensateur chargé et courant nul, donc E_C maximale et E_B nulle.

2.4 Déterminer graphiquement la valeur de l'énergie E_T du circuit.

La courbe 1 est une droite horizontale située à mi-distance entre les graduations 25 mJ et 30 mJ.

$E_T \approx 27{,}5 \text{ mJ} = 27{,}5 \times 10^{-3} \text{ J}$

COMPRENDRE
Contrôle : à $t = 0$ toute l'énergie est dans le condensateur chargé sous $E = 5{,}0$ V, donc $E_T = \frac{1}{2} C E^2 = 27{,}5$ mJ. La lecture est cohérente.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$$0.5 \times 2200 \times 10^{-6} \times 5.0^2 \approx 0.0275$$

2.5 Dans quel dipôle est emmagasinée l'énergie à la date $t = 0{,}20$ s ? Justifier.

À $t = 0{,}20$ s, le document 2 donne $u = 0$ V, donc $E_C = \frac{1}{2}Cu^2 = 0$.

Au même instant, l'intensité est maximale (document 3), donc E_B est maximale. Le document 4 le confirme : la courbe 2 atteint E_T et la courbe 3 s'annule.

À $t = 0{,}20$ s, toute l'énergie est emmagasinée dans la **bobine** : $E_B = E_T$.

2.6 En déduire la valeur de l'inductance de la bobine, en exploitant si besoin un document.

Données utiles $E_T = 27{,}5 \times 10^{-3}$ J (2.4)

À $t = 0{,}20$ s : $E_B = E_T = \frac{1}{2} L i^2$, d'où $L = \frac{2\,E_T}{i^2}$.

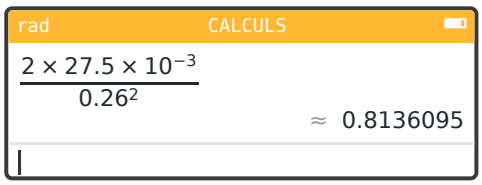
Sur le document 3, à $t = 0{,}20$ s, l'intensité vaut $i = 0{,}26$ A (valeur maximale).

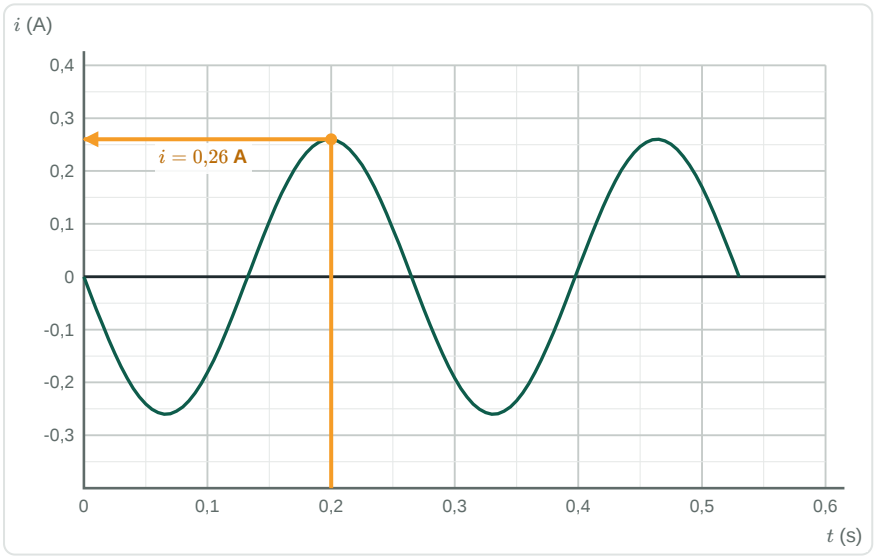
$$L = \frac{2 \times 27{,}5 \times 10^{-3}}{0{,}26^2} = 0{,}81 \text{ H}$$

$L = 0{,}81$ H, valeur proche de celle de la méthode temporelle (0,78 H).

PIÈGE
Convertir l'énergie en joules ($27{,}5 \times 10^{-3}$ J) et penser au carré de l'intensité. Une lecture $i = 0{,}25$ A donnerait 0,88 H : l'écart vient surtout de la lecture graphique.

À LA CALCULATRICE





2.6 · Document 3 : lecture de l'intensité à $t = 0{,}20$ s

3.1 En tenant compte des orientations du schéma, exprimer la tension u aux bornes de la bobine en fonction de l'intensité i et de l'inductance L.

Interrupteur en position (2), le courant d'intensité i traverse la bobine de C vers B. La flèche de la tension u pointe vers B : $u = u_{BC}$.

Les flèches de u et de i sont de même sens pour la bobine : c'est la convention générateur. Comme $u_{CB} = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ (convention récepteur, résistance nulle) et $u = -u_{CB}$:

$$u = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

PIÈGE
Écrire $u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ sans regarder les flèches. Cette relation suppose la convention récepteur (flèches de u et de i opposées), ce qui n'est pas le cas ici pour la bobine.

3.2 Exprimer l'intensité i du courant, interrupteur en position (2), en fonction de la tension u et de la capacité C.

Le courant arrive sur l'armature reliée à A, de charge q, et la flèche de u pointe vers cette armature : $q = C\,u$ et $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$.

C étant constante :

$$\boxed{i = C\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}}$$

3.3 En déduire l'équation différentielle vérifiée par le circuit sous la forme $\ddot{u} + A^2 u = 0$ et exprimer la constante A en fonction de L et C.

On reporte $i = C\,\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ dans $u = -L\,\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$:

$$u = -L\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(C\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right) = -LC\,\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}$$

En divisant par LC : $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{1}{LC}\,u = 0$. Par identification, $A^2 = \dfrac{1}{LC}$.

$$\boxed{\ddot{u} + \frac{1}{LC}\,u = 0 \text{ avec } A = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

COMPRENDRE
A est la pulsation propre du circuit : $A = \frac{2\pi}{T_0}$. On retrouve ainsi $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$, utilisée à la question 1.3.

3.4.1 À partir du document 2, déterminer les valeurs de u_{max} et φ, puis écrire $u(t)$ sous forme numérique.

Amplitude : la tension oscille entre $-5{,}0$ V et $+5{,}0$ V, donc $u_{max} = 5{,}0$ V.

Phase : à $t = 0$, $u(0) = u_{max}\cos\varphi = u_{max}$, donc $\cos\varphi = 1$ et $\varphi = 0$.

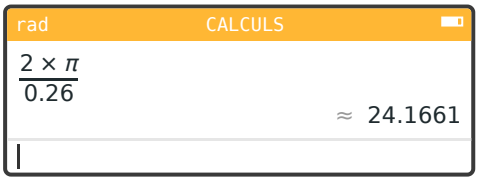
Période propre : deux périodes durent 0,53 s environ, soit $T_0 \approx 0{,}26$ s.

Alors $\dfrac{2\pi}{T_0} = \dfrac{2\pi}{0{,}26} = 24\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$.

$$\boxed{u(t) = 5{,}0\cos(24\,t)\text{, avec } u \text{ en volts et } t \text{ en secondes.}}$$

COMPRENDRE
On obtient la même pulsation avec $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $L = 0{,}81$ H : $24\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$. L'argument du cosinus est en radians.

À LA CALCULATRICE



3.4.2 En déduire l'expression numérique de $i(t)$.

Données utiles $C = 2200\ \mu\mathrm{F}$; $u(t) = 5{,}0\cos(24\,t)$ (3.4.1)

D'après 3.2 : $i = C\,\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$, avec $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -5{,}0 \times 24\,\sin(24\,t)$.

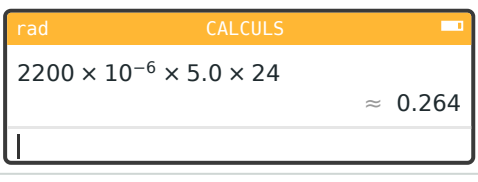
$$i(t) = -2200 \times 10^{-6} \times 5{,}0 \times 24\,\sin(24\,t)$$

$$\boxed{i(t) = -0{,}26\,\sin(24\,t)\text{, avec } i \text{ en ampères et } t \text{ en secondes.}}$$

PIÈGE
Oublier le signe « − » ou le facteur 24 en dérivant le cosinus : la dérivée de $\cos(at)$ est $-a\sin(at)$.

COMPRENDRE
Vérification sur le document 3 : $i(0) = 0$, l'intensité commence par être négative et son amplitude vaut bien 0,26 A.

À LA CALCULATRICE



4.1 Compléter le tableau donné en annexe (résistance totale, numéro de la courbe, nom du régime, justification).

Plus la résistance totale est grande, plus l'amortissement est fort.

- $0\ \Omega$: courbe 5, régime périodique. L'amplitude reste constante (5 V) : aucun amortissement.
- $2{,}0\ \Omega$: courbe 6, régime pseudo-périodique. La tension oscille avec une amplitude qui décroît : amortissement faible.
- $80\ \Omega$: courbe 4, régime apériodique. La tension revient à 0 V sans osciller : amortissement fort.

$0\ \Omega$: courbe 5 (périodique) ; $2{,}0\ \Omega$: courbe 6 (pseudo-périodique) ; $80\ \Omega$: courbe 4 (apériodique).

COMPRENDRE
L'énoncé annonce 4 expériences, mais le document 5 ne montre que trois courbes et l'annexe ne compte que trois lignes : on traite les trois cas fournis.

Résistance totale du circuit (Ω)	N° de la courbe correspondante	Nom du régime associé	Justification
0	5	périodique	Oscillations sinusoïdales d'amplitude constante : aucun amortissement.
2,0	6	pseudo-périodique	Oscillations dont l'amplitude décroît : amortissement faible.
80	4	apériodique	Retour à 0 V sans oscillation : amortissement fort.

4.1 · Annexe à rendre avec la copie, complétée (réponses en orange)

4.2 Justifier l'aspect de la courbe 6 par des considérations énergétiques.

Le circuit possède une résistance (2,0 Ω). À chaque échange d'énergie entre le condensateur et la bobine, une partie de l'énergie est dissipée par effet Joule dans cette résistance, sous forme de transfert thermique.

L'énergie totale E_T diminue donc au cours du temps. Or, lorsque u est maximale, $i = 0$ et $E_T = \frac{1}{2} C\, u_{max}^2$.

L'énergie du circuit décroît par effet Joule, donc l'amplitude de la tension diminue à chaque oscillation.