Les dominos

Bac S 2009 Antilles-Guyane rattrapage (ancien programme) · Exercice 3 **4 points** **Durée conseillée 52 min**

1.1 À quelle force la bille est-elle soumise entre les points O et M exclus ?

Entre O et M, la bille n'est plus en contact avec le support et les frottements sont négligés.

La bille n'est soumise qu'à son poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$: elle est en chute libre.

COMPRENDRE
« Exclus » écarte les deux contacts : en O la bille touche encore le support, en M elle heurte le domino. Entre les deux, plus aucune force de contact ne s'exerce.

1.2 En appliquant la seconde loi de Newton à la bille après le point O, établir la relation entre le vecteur accélération $\vec{a}$ de son centre d'inertie et le vecteur accélération de pesanteur $\vec{g}$.

Système {bille}, de masse m constante ; référentiel terrestre supposé galiléen ; seule force : le poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$.

Seconde loi de Newton : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\,\vec{a}$, soit $m\,\vec{g} = m\,\vec{a}$.

$\vec{a} = \vec{g}$

COMPRENDRE
La masse se simplifie : le mouvement d'une chute libre ne dépend pas de la masse de l'objet. Dans le repère, $a_x = 0$ et $a_y = -g$, d'où les coordonnées de la vitesse admises par l'énoncé.

MÉTHODE
Toujours annoncer le système, le référentiel galiléen et le bilan des forces avant d'écrire la loi : ces trois lignes sont notées.

1.3 Montrer que l'équation de la trajectoire du centre d'inertie de la bille entre O et M est $y(x) = \dfrac{-g\,x^2}{2\,v_0^2}$.

Données utiles $v_x(t) = v_0$; $v_y(t) = -g\,t$; à $t = 0$, la bille est en O $(0\,;\,0)$

Comme $v_x = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ et $v_y = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, on cherche les primitives :

$$x(t) = v_0\,t + C_1 \qquad y(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + C_2$$

À $t = 0$, la bille est en O : $x(0) = 0$ et $y(0) = 0$, donc $C_1 = 0$ et $C_2 = 0$.

Équations horaires : $x(t) = v_0\,t$ et $y(t) = -\dfrac{1}{2}\,g\,t^2$.

On élimine le temps : $t = \dfrac{x}{v_0}$, que l'on reporte dans $y(t)$:

$$y = -\frac{1}{2}\,g\left(\frac{x}{v_0}\right)^2$$

$y(x) = \dfrac{-g\,x^2}{2\,v_0^2}$: c'est bien l'expression attendue (portion de parabole).

PIÈGE
Oublier les constantes d'intégration, ou ne pas les justifier par la position initiale. Même nulles, elles doivent apparaître sur la copie.

MÉTHODE
Équation de la trajectoire : 1) primitives de la vitesse ; 2) constantes par les conditions initiales ; 3) isoler t dans $x(t)$; 4) le reporter dans $y(t)$.

1.4 Calculer v_0 pour que le centre d'inertie de la bille arrive au point M.

Données utiles $x_M = 0{,}40$ m ; $y_M = -0{,}20$ m ; $g = 9{,}8\ \text{N} \cdot \text{kg}^{-1}$

M appartient à la trajectoire : $y_M = \dfrac{-g\,x_M^2}{2\,v_0^2}$, donc $v_0^2 = \dfrac{-g\,x_M^2}{2\,y_M}$.

Comme $y_M < 0$, ce quotient est positif, et $v_0 > 0$:

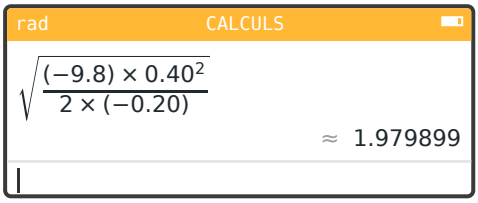
$$v_0 = \sqrt{\frac{-g\,x_M^2}{2\,y_M}} = \sqrt{\frac{-9{,}8 \times 0{,}40^2}{2 \times (-0{,}20)}}$$

$$\boxed{v_0 = 2{,}0\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

PIÈGE
Prendre $y_M = +0{,}20$ m : l'axe vertical est orienté vers le haut et M est sous O. Avec le mauvais signe, on obtient la racine d'un nombre négatif.

COMPRENDRE
Les données ont deux chiffres significatifs ($9{,}8$; $0{,}40$; $0{,}20$) : le résultat en garde deux, soit $2{,}0$ et non $1{,}98$ ou 2.

À LA CALCULATRICE



2.1.1 Établir l'expression de l'énergie mécanique $E_M(A)$ de la bille en A en fonction de y_A.

Données utiles bille lâchée en A sans vitesse initiale ; $E_p(O) = 0$ à l'altitude $y = 0$

L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle de pesanteur. Avec l'axe vertical orienté vers le haut et l'origine choisie en O : $E_p = m\,g\,y$.

$$E_M(A) = \frac{1}{2}\,m\,v_A^2 + m\,g\,y_A$$

La bille est lâchée sans vitesse initiale : $v_A = 0$.

$$\boxed{E_M(A) = m\,g\,y_A}$$

COMPRENDRE
En A, toute l'énergie est sous forme potentielle. L'expression $E_p = m\,g\,y$ n'est valable que parce que l'axe est orienté vers le haut et que la référence est prise en $y = 0$.

2.1.2 Établir l'expression de l'énergie mécanique $E_M(B)$ de la bille en B en fonction de v_B.

Données utiles $y_B = 0$

$$E_M(B) = \frac{1}{2}\,m\,v_B^2 + m\,g\,y_B$$

Le point B est à l'altitude $y_B = 0$: son énergie potentielle de pesanteur est nulle.

$$\boxed{E_M(B) = \frac{1}{2}\,m\,v_B^2}$$

2.1.3 En déduire l'expression de y_A en fonction de $v_0 = v_B$.

Données utiles $E_M(A)$ (2.1.1) ; $E_M(B)$ (2.1.2)

L'énergie mécanique se conserve entre A et B (seul le poids, force conservative, travaille) :

$$E_M(A) = E_M(B) \iff m\,g\,y_A = \frac{1}{2}\,m\,v_B^2$$

On simplifie par m et on remplace v_B par v_0 :

$$\boxed{y_A = \frac{v_0^2}{2\,g}}$$

PIÈGE
Écrire la conservation sans la justifier. La réaction $\vec{R}$, perpendiculaire au déplacement, ne travaille pas : c'est l'argument qui autorise $E_M(A) = E_M(B)$.

COMPRENDRE
Ni la masse de la bille ni l'inclinaison du plan n'interviennent : seule la hauteur de chute fixe la vitesse en bas d'une pente sans frottement.

2.1.4 Calculer y_A pour que v_0 ait la valeur de $2{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Données utiles $v_0 = 2{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $g = 9{,}8\ \text{N}\cdot\text{kg}^{-1}$; $y_A = \dfrac{v_0^2}{2\,g}$ (2.1.3)

$$y_A = \frac{v_0^2}{2\,g} = \frac{2{,}0^2}{2 \times 9{,}8}$$

$y_A = 0{,}20$ m, soit 20 cm

COMPRENDRE
On retrouve la hauteur de la chute entre O et M (20 cm). Unités : $\text{N}\cdot\text{kg}^{-1}$ équivaut à $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, donc v_0^2/g est bien une longueur.

À LA CALCULATRICE



2.2.1 Donner l'expression vectorielle de la force de rappel $\vec{F}$ exercée par le ressort.

Données utiles raideur k ; abscisse x de l'extrémité du ressort ; ressort au repos pour $x = 0$

L'extrémité du ressort est au repos en O : son abscisse x mesure directement la déformation du ressort.

$\vec{F} = -k\,x\,\vec{i}$

COMPRENDRE
Le ressort est comprimé : $x < 0$, donc $-k\,x > 0$. La force de rappel est dirigée selon $+\vec{i}$: elle pousse la bille vers O, ce qui tend à ramener le ressort à sa longueur de repos.

2.2.2 Pendant la compression, la force $\vec{F}_{op}$ de l'opérateur est à chaque instant opposée à la force de rappel $\vec{F}$. En déduire l'expression vectorielle de $\vec{F}_{op}$.

Données utiles $\vec{F} = -k\,x\,\vec{i}$ (2.2.1)

$\vec{F}_{op} = -\vec{F} = -(-k\,x\,\vec{i})$

$\vec{F}_{op} = k\,x\,\vec{i}$

COMPRENDRE
Avec $x < 0$, $\vec{F}_{op}$ est dirigée selon $-\vec{i}$: l'opérateur pousse bien vers la gauche, dans le sens de la compression.

2.2.3 Montrer que le travail de la force $\vec{F}_{op}$ entre les points O et C a pour expression $W_{OC}(\vec{F}_{op}) = \dfrac{1}{2}\,k\,x_C^2$.

Données utiles $\vec{F}_{op} = k\,x\,\vec{i}$ (2.2.2) ; $x_O = 0$

La force $\vec{F}_{op}$ dépend de x : elle n'est pas constante, on ne peut pas écrire $W = \vec{F}_{op} \cdot \overrightarrow{OC}$.

Sur un déplacement élémentaire $\mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{d}x\,\vec{i}$, assez petit pour que la force y soit constante, le travail élémentaire vaut :

$$\delta W = \vec{F}_{op} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = k\,x\,\vec{i} \cdot \mathrm{d}x\,\vec{i} = k\,x\,\mathrm{d}x$$

On somme ces travaux de O ($x = 0$) à C ($x = x_C$) :

$$W_{OC}(\vec{F}_{op}) = \int_0^{x_C} k\,x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\,k\,x^2\right]_0^{x_C} = \frac{1}{2}\,k\,x_C^2 - 0$$

$W_{OC}(\vec{F}_{op}) = \dfrac{1}{2}\,k\,x_C^2$: c'est bien l'expression attendue.

PIÈGE
Appliquer $W = F \times OC$ avec la force finale $k\,|x_C|$: on trouve $k\,x_C^2$, le double du bon résultat. La force croît de 0 à $k\,|x_C|$ pendant la compression.

COMPRENDRE
Ce travail est positif (force et déplacement de même sens) : c'est l'aire sous la droite $F = k\,|x|$.

2.2.4 L'énergie potentielle élastique emmagasinée par le ressort est entièrement restituée à la bille sous forme d'énergie cinétique. Exprimer x_C en fonction de v_0, m et k.

Données utiles $W_{OC}(\vec{F}_{op}) = \frac{1}{2} k x_C^2$ (2.2.3)

Le travail de l'opérateur est stocké par le ressort : $E_{pe} = \frac{1}{2} k x_C^2$. Cette énergie est intégralement transférée à la bille, qui part du repos et atteint O avec la vitesse v_0 :

$$\frac{1}{2} k x_C^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad \text{donc} \quad x_C^2 = \frac{m v_0^2}{k}$$

Le point C est à gauche de O : $x_C < 0$, on garde la racine négative.

$$\boxed{x_C = -v_0 \sqrt{\frac{m}{k}}}$$

PIÈGE
Donner la racine positive. La question porte sur une coordonnée, pas sur une longueur : le signe « $-$ » fait partie de la réponse.

2.2.5 Calculer la coordonnée x_C pour que v_0 ait la valeur $2{,}0\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Données utiles $m = 60\ \text{g}$; $k = 50\ \text{N} \cdot \text{m}^{-1}$; $v_0 = 2{,}0\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$; expression de x_C (2.2.4)

On convertit la masse : $m = 60\ \text{g} = 6{,}0 \times 10^{-2}$ kg.

$$x_C = -v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} = -2{,}0 \times \sqrt{\frac{6{,}0 \times 10^{-2}}{50}}$$

$$\boxed{x_C = -6{,}9 \times 10^{-2}\ \text{m, soit } -6{,}9\ \text{cm}}$$

PIÈGE
Laisser la masse en grammes : on trouverait $-2{,}2$ m, valeur absurde pour un petit canon à ressort. Dans une énergie cinétique, la masse est toujours en kilogrammes.

COMPRENDRE
Une compression de 7 cm environ remplace un plan incliné haut de 20 cm : le canon donne la même vitesse de lancement avec un encombrement bien plus faible.

À LA CALCULATRICE

