Frottements avec l'air: qu'en dit la NASA?

Bac S 2009 Métropole (ancien programme) · Exercice 3 **5,5 points** **Durée conseillée 1 h 05**

1 Rappeler ce que signifie le caractère uniforme du champ de pesanteur.

Dans la région de l'espace étudiée, le vecteur $\vec{g}$ est le même en tout point : même direction (la verticale), même sens (vers le bas) et même valeur.

Champ uniforme : $\vec{g}$ est un vecteur constant, de valeur $g = 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ partout.

PIÈGE
« Uniforme » qualifie l'espace (même vecteur en tout point), pas le temps. Dire seulement « g garde la même valeur » est incomplet : direction et sens comptent aussi.

2 Donner les caractéristiques de la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$ qui s'exerce sur le système.

La poussée d'Archimède est l'opposé du poids du volume d'air déplacé par les ballons : $\vec{\Pi} = -\rho_{\text{air}}\, V\, \vec{g}$.

- Point d'application : le centre d'inertie G du système.
- Direction : verticale.
- Sens : vers le haut (opposé à $\vec{k}$).
- Valeur : $\Pi = \rho_{\text{air}}\, V\, g$.

$$\vec{\Pi} = -\rho_{\text{air}}\, V\, g\, \vec{k}$$

PIÈGE
La masse volumique est celle du fluide déplacé (l'air), pas celle de l'objet, et V est le volume du système immergé.

COMPRENDRE
Avec $V \approx 7$ L, la masse d'air déplacée vaut $8{,}4$ g, à comparer aux 22 g du système : ici la poussée d'Archimède n'est pas négligeable devant le poids.

3 Montrer que la vitesse v vérifie l'équation différentielle (1) avec le modèle 1, puis l'équation (2) avec le modèle 2.

Système {grappe de ballons}, de masse m ; référentiel terrestre supposé galiléen.

Forces : poids $\vec{P} = m\, g\, \vec{k}$; poussée d'Archimède $\vec{\Pi} = -\rho_{\text{air}}\, V\, g\, \vec{k}$; frottements $\vec{f}_1 = -A\, \eta_{\text{air}}\, v\, \vec{k}$.

Deuxième loi de Newton : $\vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{f}_1 = m\, \vec{a}$.

Projection sur l'axe Oz orienté vers le bas, avec $a_z = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$:

$$m\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = m\, g - \rho_{\text{air}}\, V\, g - A\, \eta_{\text{air}}\, v$$

En factorisant $m\, g$ dans les deux premiers termes, on obtient l'équation (1).

Modèle 2 : seule la force de frottement change, $\vec{f}_2 = -B\, \rho_{\text{air}}\, v^2\, \vec{k}$. La même projection donne $m\,\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = m\, g - \rho_{\text{air}}\, V\, g - B\, \rho_{\text{air}}\, v^2$, soit l'équation (2).

(1) : $m\,\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = m\, g\left(1 - \dfrac{V\, \rho_{\text{air}}}{m}\right) - A\, \eta_{\text{air}}\, v$; (2) : même premier terme, puis $-\,B\, \rho_{\text{air}}\, v^2$

PIÈGE
L'axe est orienté vers le bas : le poids est positif, la poussée d'Archimède et les frottements sont négatifs. Une erreur de signe ici fausse toute la suite.

MÉTHODE
Toujours dans cet ordre : système, référentiel, bilan des forces, deuxième loi de Newton sous forme vectorielle, puis projection sur l'axe. Le signe de chaque terme vient du sens de la force par rapport à $\vec{k}$.

4.1 Déduire des équations différentielles l'expression littérale de l'accélération initiale a_0 en fonction de m, V, g et ρ_{air}.

Le système est lâché sans vitesse initiale : $v(0) = 0$. Le terme de frottement de l'équation (1) est donc nul à $t = 0$:

$$m\,a_0 = m\,g\left(1 - \frac{V\,\rho_{\text{air}}}{m}\right)$$

$$\boxed{a_0 = g\left(1 - \frac{V\,\rho_{\text{air}}}{m}\right)}$$

COMPRENDRE
Les deux modèles donnent le même a_0, car les frottements s'annulent quand $v = 0$. L'accélération initiale ne permet donc pas de choisir entre eux.

4.2 Vérifier par une méthode graphique, sur la figure 2 de l'annexe, que l'accélération initiale a_0 est de l'ordre de $6\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

L'accélération est la dérivée de la vitesse : a_0 est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $v(t)$ à l'origine.

On trace cette tangente : elle passe par l'origine et par le point $(0{,}4\ \text{s}; 2{,}4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1})$.

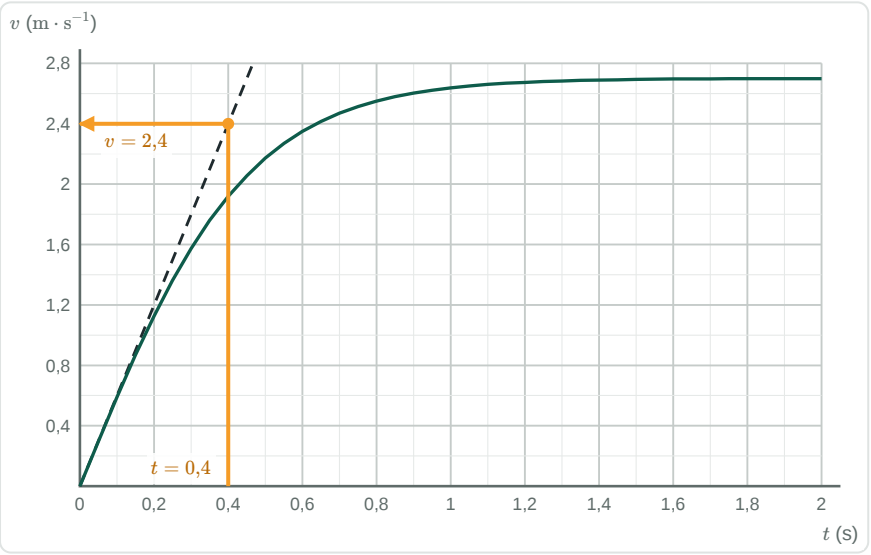
$$a_0 = \frac{2{,}4 - 0}{0{,}4 - 0} = 6\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

$\boxed{a_0 \approx 6\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}\text{, valeur attendue.}}$

PIÈGE
Ne pas calculer v/t avec un point de la courbe : c'est la tangente à l'origine qu'il faut tracer, et choisir sur elle deux points éloignés.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS
$\frac{2.4}{0.4}$
$\approx$ 6



4.2 · Figure 2 : tangente à l'origine, qui passe par le point (0,4 s ; 2,4 m·s⁻¹)

4.3 Retrouver cette valeur par un calcul, sachant que le volume V du système est de l'ordre de 7 L.

Données utiles $g = 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; $V \approx 7$ L ; $\rho_{\text{air}} = 1{,}2\ \text{g}\cdot\text{L}^{-1}$; $m = 22$ g ; expression de a_0 (4.1)

Le rapport $\frac{V\,\rho_{\text{air}}}{m}$ est sans unité si V est en L, ρ_{air} en $\text{g}\cdot\text{L}^{-1}$ et m en g.

$$a_0 = 9{,}8 \times \left(1 - \frac{7 \times 1{,}2}{22}\right) = 6{,}1\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

$\boxed{a_0 \approx 6\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}\text{ : le calcul confirme la valeur lue sur le graphique.}}$

PIÈGE
Mélanger les unités, par exemple V en L avec ρ_{air} en $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$. En unités SI : $V = 7 \times 10^{-3}\ \text{m}^3$ et $m = 22 \times 10^{-3}$ kg.

COMPRENDRE
Chiffres significatifs : V n'est connu qu'avec un seul chiffre (« de l'ordre de 7 L »). Le résultat ne peut pas être plus précis : on retient $6\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

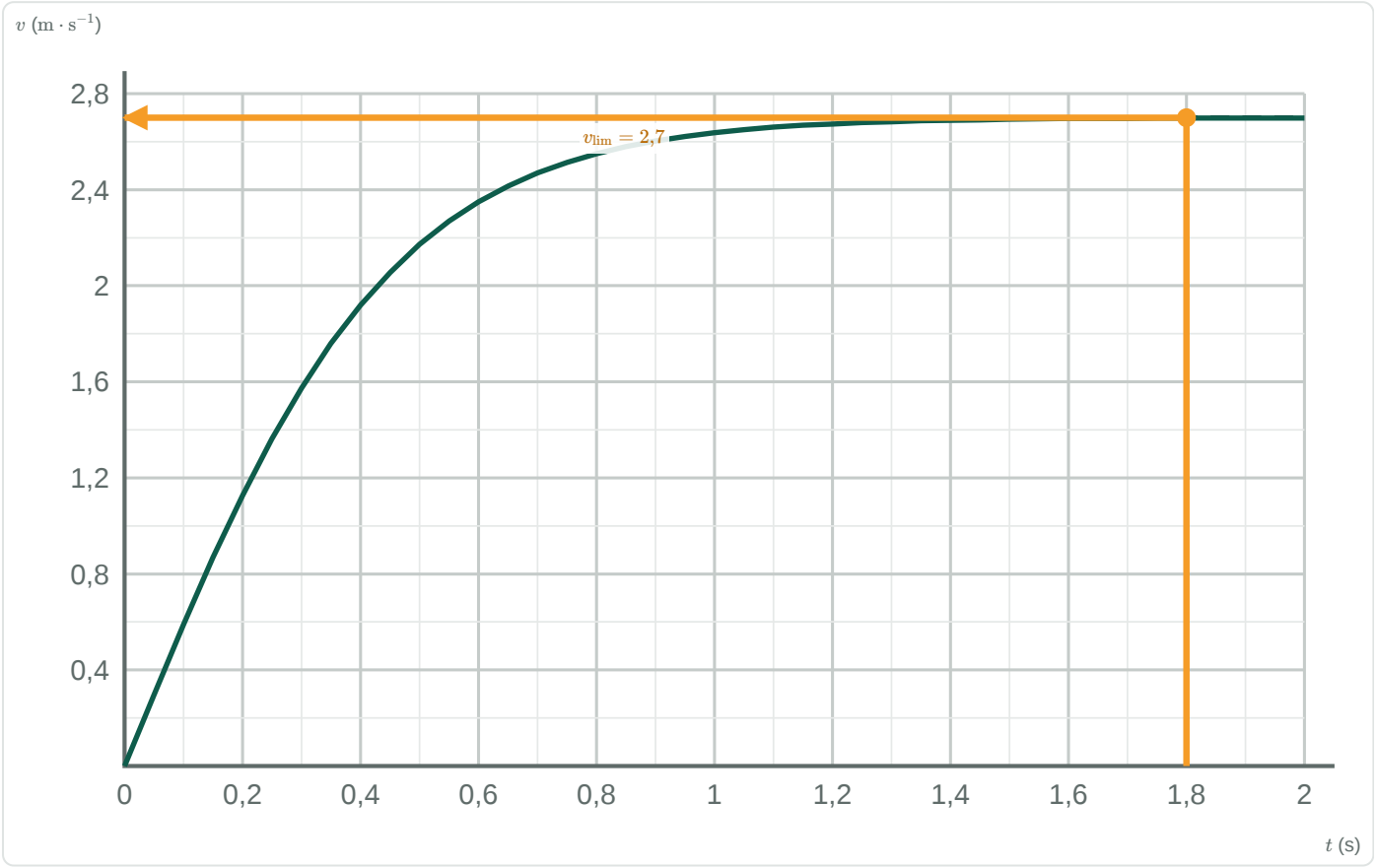
À LA CALCULATRICE

rad CALCULS
$9.8 \times \left(1 - \frac{7 \times 1.2}{22}\right)$
$\approx$ 6.058182

5.1 Déterminer graphiquement, sur la figure 2 de l'annexe, la valeur de la vitesse limite v_{lim}, en faisant apparaître la construction.

Aux grandes dates, la courbe $v(t)$ tend vers une asymptote horizontale. On la trace : son ordonnée est la vitesse limite.

$$v_{\text{lim}} = 2{,}7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$



5.1 · Figure 2 : asymptote horizontale et lecture de la vitesse limite

5.2 À l'aide de l'équation différentielle, démontrer l'expression de la vitesse limite $v_{\text{lim},1}$ dans le cas du modèle 1.

Quand la vitesse limite est atteinte, v est constante : $\dfrac{\text{d}v}{\text{d}t} = 0$.

L'équation (1) s'écrit alors

$$0 = m\,g\left(1 - \frac{V\,\rho_{\text{air}}}{m}\right) - A\,\eta_{\text{air}}\,v_{\text{lim},1}$$

On isole $v_{\text{lim},1}$:

$$v_{\text{lim},1} = \frac{m\,g\left(1 - \dfrac{V\,\rho_{\text{air}}}{m}\right)}{A\,\eta_{\text{air}}}$$

MÉTHODE

Régime permanent : écrire que la dérivée est nulle dans l'équation différentielle, sans la résoudre. Avec l'équation (2), la même démarche donne $v_{\text{lim},2}^2$, d'où une racine carrée.

5.3 Calculer la valeur approchée de $v_{\text{lim},1}$ à partir des données de l'énoncé.

Données utiles $m = 22 \times 10^{-3}$ kg ; $g = 9{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$; $V \approx 7$ L ; $\rho_{\text{air}} = 1{,}2\ \text{g} \cdot \text{L}^{-1}$; $A \approx 1 \times 10^{1}$ m ; $\eta_{\text{air}} = 2 \times 10^{-5}\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$

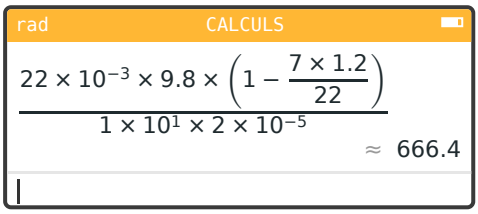
La masse en facteur de g est en kg ; le rapport entre parenthèses, sans unité, se calcule en L et en g.

$$v_{\text{lim},1} = \frac{22 \times 10^{-3} \times 9{,}8 \times \left(1 - \dfrac{7 \times 1{,}2}{22}\right)}{1 \times 10^{1} \times 2 \times 10^{-5}} = 6{,}7 \times 10^{2}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$v_{\text{lim},1} \approx 7 \times 10^{2}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ (un seul chiffre significatif, comme A et η_{air})

PIÈGE
Laisser $m = 22$ g au numérateur donne une vitesse mille fois trop grande. Seul le rapport $V\rho_{\text{air}}/m$ peut garder les grammes et les litres.

À LA CALCULATRICE



5.4 Sachant que $v_{\text{lim},2} = 2\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, comparer les deux vitesses limites à la valeur expérimentale et en déduire le modèle le plus adapté.

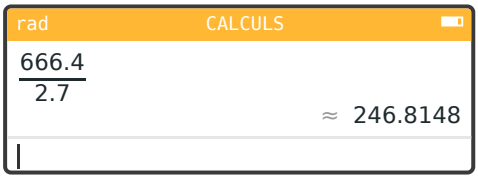
Données utiles $v_{\text{lim}} = 2{,}7\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ (5.1) ; $v_{\text{lim},1} \approx 7 \times 10^{2}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ (5.3) ; $v_{\text{lim},2} = 2\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

$v_{\text{lim},1}$ est environ 250 fois plus grande que la vitesse limite mesurée, alors que $v_{\text{lim},2}$ est du même ordre de grandeur que $2{,}7\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Le modèle 2 (force proportionnelle à v^2) est le plus adapté à la chute de la grappe de ballons.

COMPRENDRE
L'accord n'est pas parfait (2 contre $2{,}7\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$) car B et V ne sont connus qu'approximativement. On compare des ordres de grandeur, ce qui suffit pour écarter le modèle 1.

À LA CALCULATRICE



6.1 Citer les noms des formes d'énergie que possède la navette en orbite autour de la Terre.

La navette est en mouvement par rapport à la Terre et se trouve en altitude.

Énergie cinétique (liée à sa vitesse) et énergie potentielle de pesanteur (liée à son altitude) ; leur somme est l'énergie mécanique.

6.2 Dans la phrase « il faut dissiper 2 térajoules en 2000 secondes, soit 1 mégawatt moyen », nommer les deux grandeurs physiques dont les valeurs sont soulignées.

Le joule est l'unité d'énergie, le watt l'unité de puissance.

« 2 térajoules » : une énergie ; « 1 mégawatt » : une puissance (moyenne).

6.3 En ne tenant compte que de la variation de vitesse, calculer les deux grandeurs précédentes à partir des données du texte, puis dire si les résultats sont en accord avec ceux de l'élève.

Données utiles $m = 70\ \text{t} = 70 \times 10^3\ \text{kg}$; $v_i = 28\,000\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$; $v_f = 400\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$; $\Delta t = 2\,000\ \text{s}$

Conversions : $v_i = \dfrac{28\,000}{3{,}6} = 7{,}78 \times 10^3\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $v_f = \dfrac{400}{3{,}6} = 111\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Variation d'énergie cinétique : $\Delta E_c = \dfrac{1}{2} m \left(v_f^2 - v_i^2\right)$

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} \times 70 \times 10^3 \times \left[\left(\frac{400}{3{,}6}\right)^2 - \left(\frac{28\,000}{3{,}6}\right)^2\right] = -2{,}1 \times 10^{12}\ \text{J}$$

L'énergie à dissiper est donc $E = |\Delta E_c| = 2{,}1$ TJ : accord avec les « 2 térajoules » de l'élève.

Puissance moyenne : $P = \dfrac{E}{\Delta t} = \dfrac{2{,}1 \times 10^{12}}{2\,000} = 1{,}1 \times 10^9\ \text{W} = 1{,}1 \times 10^3$ MW.

Désaccord pour la puissance : elle vaut environ 1 gigawatt, soit mille fois plus que le « 1 mégawatt » annoncé.

$E \approx 2{,}1 \times 10^{12}$ J $= 2{,}1$ TJ (accord) ; $P \approx 1{,}1 \times 10^9$ W $\approx 1 \times 10^3$ MW (l'élève s'est trompé d'un facteur 1 000).

PIÈGE

Oublier de convertir les vitesses en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ et la masse en kg. La vitesse étant au carré, l'erreur de conversion est elle-même élevée au carré.

COMPRENDRE

ΔE_c est négative : la navette cède cette énergie à l'air sous forme de chaleur. La vitesse finale ne compte presque pas : v_f^2 est environ 5 000 fois plus petit que v_i^2.

À LA CALCULATRICE

