Michael Faraday (1791-1867)

Bac S 2008 Asie (ancien programme) · Exercice 4 **6,5 points** **Durée conseillée 1 h 18**

1 Première partie. Écrire l'équation de la réaction à l'électrode où se dépose le cuivre. Est-ce une oxydation ou une réduction ?

Les ions cuivre (II) de la solution gagnent des électrons et donnent le métal :

$\mathrm{Cu^{2+}\,(aq) + 2\,e^- = Cu\,(s)}$: gain d'électrons, c'est une **réduction**.

PIÈGE
Oublier les états physiques ou équilibrer avec un seul électron : l'ion porte deux charges positives, il faut deux électrons pour obtenir l'atome neutre.

2 Préciser le nom de l'électrode (anode ou cathode) où se produit ce dépôt, et le signe du pôle du générateur auquel elle est reliée.

L'électrode siège d'une réduction est, par définition, la cathode. Les électrons qu'elle consomme lui sont apportés par le générateur, qui les fait sortir par son pôle négatif.

Le cuivre se dépose à la **cathode**, reliée au pôle $-$ du générateur.

COMPRENDRE
Dans une électrolyse, c'est le générateur qui impose le sens du courant. La cathode est reliée à sa borne $-$, alors que dans une pile la cathode est la borne $+$. Seule la définition « cathode = réduction » ne change jamais.

3 Donner une relation entre la quantité de matière de cuivre déposée n_{Cu} pendant la durée Δt et la quantité d'électrons n_e (en mol) ayant circulé.

D'après la demi-équation, la formation d'une mole de cuivre consomme deux moles d'électrons.

$$n_{\mathrm{Cu}} = \frac{n_e}{2}$$

PIÈGE
Écrire $n_{\mathrm{Cu}} = 2\,n_e$. Il faut deux électrons par atome : il se dépose deux fois moins d'atomes de cuivre qu'il ne circule d'électrons.

4 Exprimer la quantité d'électrons n_e (en mol) en fonction de l'intensité I, de la durée Δt, du nombre d'Avogadro N_A et de la charge élémentaire e.

Données utiles le faraday : $1\ F = N_A\,e$

Charge électrique transportée par un courant constant pendant Δt : $Q = I\,\Delta t$.

Cette charge est celle de n_e moles d'électrons, chaque mole portant en valeur absolue $N_A\,e$: $Q = n_e\,N_A\,e$.

En égalant : $I\,\Delta t = n_e\,N_A\,e$.

$$n_e = \frac{I\,\Delta t}{N_A\,e} = \frac{I\,\Delta t}{F}$$

COMPRENDRE
Le faraday est la charge d'une mole d'électrons, en valeur absolue : environ $96\,500\ \mathrm{C\cdot mol^{-1}}$. Diviser une charge par F donne directement une quantité d'électrons en moles.

5 Établir la relation entre n_{Cu} et l'intensité I ; montrer que la quantité de matière produite à une électrode est proportionnelle à l'intensité du courant.

Données utiles $n_{Cu} = \frac{n_e}{2}$ (question 3) ; $n_e = \frac{I\,\Delta t}{N_A\,e}$ (question 4)

On remplace n_e par son expression : $n_{Cu} = \frac{I\,\Delta t}{2\,N_A\,e}$.

Pour une durée Δt fixée, le facteur $k = \frac{\Delta t}{2\,N_A\,e}$ est une constante.

$n_{Cu} = \frac{\Delta t}{2\,N_A\,e} \times I = k\,I$: la quantité de cuivre déposée est proportionnelle à I.

MÉTHODE
Pour prouver une proportionnalité, écrire la relation sous la forme $y = k\,x$ et préciser pourquoi k ne dépend pas de x (ici, la durée est fixée).

6 Exprimer la masse de cuivre m_{Cu} déposée pendant Δt et montrer qu'elle est proportionnelle à la masse molaire atomique divisée par un petit nombre entier. Que vaut cet entier ?

$m_{Cu} = n_{Cu}\,M_{Cu}$, donc $m_{Cu} = \frac{I\,\Delta t}{2\,N_A\,e}\,M_{Cu}$.

En posant $K = \frac{I\,\Delta t}{N_A\,e}$, constante pour un courant et une durée donnés : $m_{Cu} = K \times \frac{M_{Cu}}{2}$.

$m_{Cu} = K \times \frac{M_{Cu}}{2}$: l'affirmation est vérifiée, et le petit nombre entier vaut **2**.

COMPRENDRE
Cet entier est le nombre d'électrons échangés par ion déposé, c'est-à-dire la charge de l'ion : 2 pour Cu^{2+}, 1 pour Ag^{+}, 3 pour Al^{3+}.

1 Seconde partie. Quelle relation faut-il programmer pour obtenir l'intensité i du courant en fonction du temps ?

Données utiles $R = 90\ \Omega$; l'interface mesure u_R

Le conducteur ohmique de résistance R est parcouru par i dans les deux saisies, et u_R est fléchée en convention récepteur. Loi d'Ohm : $u_R = R\,i$.

$i = \frac{u_R}{R}$, soit dans le tableur $i = \frac{u_R}{90}$ (u_R en V, i en A).

COMPRENDRE
Une interface d'acquisition ne mesure que des tensions. On accède à une intensité par la tension aux bornes d'un conducteur ohmique : u_R et i sont proportionnelles, les deux courbes ont la même allure.

2 Attribuer à chaque saisie la courbe correspondante. Justifier.

1re saisie (K_1 fermé) : le circuit ne contient que le générateur et deux conducteurs ohmiques. Rien ne retarde le courant, qui prend sa valeur définitive dès la fermeture : c'est la courbe B.

2e saisie (K_2 fermé) : la bobine est dans le circuit. Elle s'oppose aux variations de l'intensité, qui croît progressivement à partir de zéro avant d'atteindre sa valeur limite : c'est la courbe A.

1re saisie : courbe B (palier immédiat) ; 2e saisie : courbe A (régime transitoire dû à la bobine).

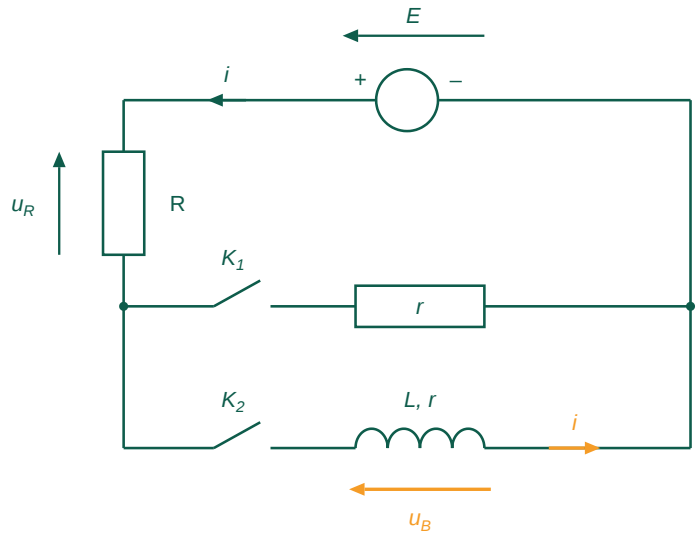
PIÈGE
Dire que la bobine « s'oppose au courant ». Elle s'oppose à ses variations : elle retarde l'établissement du courant, mais ne l'empêche pas d'atteindre la même valeur finale.

3 En convention récepteur, représenter sur le circuit de l'annexe 1 la flèche de la tension u_B aux bornes de la bobine.

Le courant sort par la borne $+$ du générateur, descend dans R puis traverse la bobine de la gauche vers la droite. En convention récepteur, la flèche de tension est de sens opposé à celui du courant : elle pointe donc vers la gauche, du côté de K_2.

Flèche u_B tracée le long de la bobine, pointe vers K_2 (sens opposé à i).

MÉTHODE
Suivre le courant depuis la borne $+$ du générateur sur toute la maille, reporter son sens sur le dipôle, puis tracer la flèche de tension dans l'autre sens. La flèche u_R de l'énoncé respecte la même règle.



3 · Annexe 1 complétée : en convention récepteur, la flèche de u_B est opposée au sens de i dans la bobine

4 Donner l'expression littérale de la tension u_B en fonction de r, L et i.

La bobine réelle équivaut à une inductance pure L en série avec une résistance r. En convention récepteur :

$$u_B = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + r\,i$$

COMPRENDRE
Le terme $L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ n'existe que si l'intensité varie. En régime permanent il s'annule et la bobine se comporte comme un simple conducteur ohmique de résistance r.

5.1 Seconde saisie. Établir l'équation différentielle qui régit l'évolution de l'intensité i lorsqu'on ferme l'interrupteur K_2.

K_1 ouvert, K_2 fermé : le générateur, le conducteur ohmique R et la bobine forment une seule maille.

Loi des mailles (additivité des tensions) : $E = u_R + u_B$.

Avec $u_R = R\,i$ et $u_B = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + r\,i$: $\quad E = R\,i + r\,i + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$.

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + (R+r)\,i = E$$

PIÈGE
Oublier la résistance r de la bobine. La résistance totale de la maille est $R + r$, et c'est elle qui apparaît ensuite dans l'intensité limite et dans la constante de temps.

5.2 En déduire l'expression littérale de l'intensité limite I en régime permanent. Déterminer graphiquement sa valeur sur l'annexe 2, puis calculer r.

Données utiles $E = 3{,}0$ V ; $R = 90\ \Omega$

En régime permanent, l'intensité est constante : $i = I$ et $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$.

L'équation différentielle devient $(R + r)\,I = E$, soit $I = \dfrac{E}{R + r}$.

Sur l'annexe 2, la courbe A tend vers l'asymptote horizontale $I = 30\ \text{mA} = 30 \times 10^{-3}$ A.

On isole r : $R + r = \dfrac{E}{I}$, donc $r = \dfrac{E}{I} - R$.

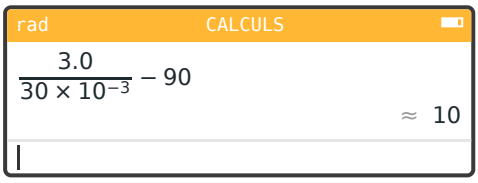
$$r = \frac{3{,}0}{30 \times 10^{-3}} - 90 = 100 - 90$$

$$\boxed{I = \frac{E}{R + r} = 30\ \text{mA et } r = 10\ \Omega}$$

PIÈGE
Laisser l'intensité en milliampères : $3{,}0 \div 30$ donne $0{,}10$ et une résistance négative. Convertir $30\ \text{mA} = 0{,}030$ A avant le calcul.

COMPRENDRE
E et I sont connus avec deux chiffres significatifs : $E/I = 1{,}0 \times 10^2\ \Omega$. La soustraction donne alors r à quelques ohms près ; on annonce $10\ \Omega$ sans chiffre supplémentaire.

À LA CALCULATRICE



5.3.1 Donner l'expression littérale de la constante de temps τ.

Pour un dipôle RL, la constante de temps est le quotient de l'inductance par la résistance totale du circuit.

$$\boxed{\tau = \frac{L}{R + r}}$$

5.3.2 Par analyse dimensionnelle, vérifier que τ est homogène à un temps.

Loi d'Ohm $u = Ri$: $[R] = \dfrac{[U]}{[I]}$.

Tension aux bornes d'une inductance $u = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$: $[U] = \dfrac{[L]\,[I]}{\mathrm{T}}$, donc $[L] = \dfrac{[U]\,\mathrm{T}}{[I]}$.

Une somme de résistances a la dimension d'une résistance, d'où :

$$[\tau] = \frac{[L]}{[R]} = \frac{[U]\,\mathrm{T}}{[I]} \times \frac{[I]}{[U]} = \mathrm{T}$$

$$\boxed{[\tau] = \mathrm{T} : \tau \text{ est bien homogène à un temps.}}$$

MÉTHODE
Pour chaque grandeur inconnue, choisir une relation simple qui la relie à des grandeurs connues (tension, intensité, temps), en tirer sa dimension, puis simplifier le quotient.

5.3.3 Par une méthode de votre choix, déterminer la valeur de τ en utilisant l'annexe 2.

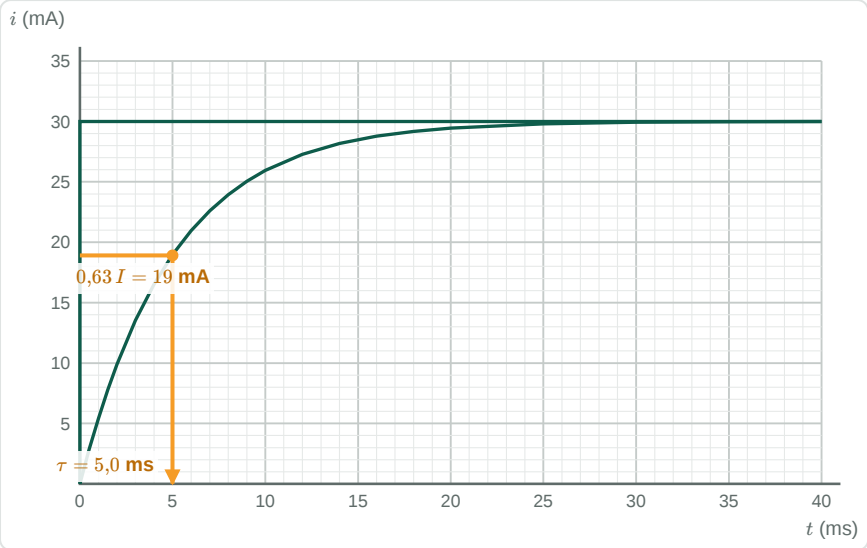
Données utiles $I = 30$ mA (question 5.2)

À la date $t = \tau$, l'intensité atteint 63 % de sa valeur limite : $i(\tau) = 0{,}63 \times I = 0{,}63 \times 30 = 19$ mA.

Sur la courbe A, le point d'ordonnée 19 mA a pour abscisse 5 ms.

$$\boxed{\tau = 5{,}0\ \text{ms} = 5{,}0 \times 10^{-3}\ \text{s}}$$

COMPRENDRE
Autre méthode : la tangente à la courbe A à l'origine coupe l'asymptote $i = I$ à la date $t = \tau$. La lecture à 63 % est plus précise, car une tangente se trace difficilement à la main.



5.3.3 · Annexe 2 complétée : lecture de τ sur la courbe A (courbe B : palier immédiat à 30 mA)

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

0.63×30

≈ 18.9

5.3.4 Calculer l'inductance L de la bobine.

Données utiles $\tau = 5{,}0 \times 10^{-3}$ s (question 5.3.3) ; $R = 90\ \Omega$; $r = 10\ \Omega$ (question 5.2)

De $\tau = \dfrac{L}{R+r}$ on tire $L = \tau\,(R+r)$.

$$L = 5{,}0 \times 10^{-3} \times (90+10)$$

$\boxed{L = 0{,}50 \text{ H}}$

PIÈGE

Garder τ en millisecondes : on obtiendrait 500 au lieu de $0{,}50$ H. Écrire le zéro final : le résultat a deux chiffres significatifs, comme τ.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$5.0 \times 10^{-3} \times (90 + 10)$

≈ 0.5

6 Justifier la limite I commune aux deux saisies.

1re saisie : le générateur alimente les conducteurs ohmiques R et r en série. Loi des mailles et loi d'Ohm : $E = R\,I + r\,I$, d'où $I = \dfrac{E}{R+r}$.

2e saisie : en régime permanent, la bobine n'intervient plus que par sa résistance r, et $I = \dfrac{E}{R+r}$ (question 5.2).

Le second conducteur ohmique a exactement la résistance de la bobine : la résistance totale est la même dans les deux circuits.

$\boxed{\text{Dans les deux cas } I = \dfrac{E}{R+r} = \dfrac{3{,}0}{90+10} = 30 \text{ mA}.}$

COMPRENDRE

C'est l'intérêt du montage : la courbe B montre ce que serait le courant sans effet d'inductance. L'écart entre A et B, pendant environ $5\,\tau = 25$ ms, est dû uniquement à L.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\dfrac{3.0}{90 + 10}$

≈ 0.03