Chute d'une bille dans un liquide visqueux

Bac S 2009 Inde (Pondichéry) (ancien programme) · Exercice 1 **4 points** **Durée conseillée 52 min**

3.1 a. Expliquer comment le logiciel détermine les vitesses v_i à partir des positions x_i aux instants t_i. b. Mettre en évidence l'existence d'une vitesse limite V_L et donner sa valeur.

Données utiles 25 images par seconde ; enregistrement 1

3.1.a Le logiciel assimile la vitesse à la date t_i à la vitesse moyenne entre les deux dates qui l'encadrent :

$$v_i = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}}$$

Avec 25 images par seconde, deux images sont séparées de $\frac{1}{25} = 0{,}040$ s, donc $t_{i+1} - t_{i-1} = 0{,}080$ s.

3.1.b Sur l'enregistrement 1, la vitesse augmente de moins en moins vite, puis les points s'alignent sur une horizontale à partir de $t \approx 0{,}3$ s : la vitesse ne varie plus, elle a atteint une valeur limite.

$$\boxed{V_L \approx 0{,}59 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

PIÈGE
Lire V_L sur un seul point. On trace l'horizontale qui passe au mieux par les derniers points et on lit son ordonnée : un peu en dessous de $0{,}6$.

COMPRENDRE
Encadrer t_i par les dates voisines donne une bonne estimation de la vitesse instantanée, à condition que l'intervalle de $0{,}080$ s reste court devant la durée d'évolution de la vitesse.

3.2 a. Bilan des forces sur la bille, avec un schéma. b. Établir l'équation différentielle vérifiée par $v(t)$ et montrer qu'elle s'écrit $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{k\,v}{m} + \alpha\,g$. c. Vérifier que $v(t) = \alpha\,g\,\frac{m}{k}\left[1 - \exp\left(-\frac{k}{m}\,t\right)\right]$ est solution et respecte $v(0) = 0$. d. Vitesse limite : expression, valeur, comparaison ; unité, valeur et interprétation de $\frac{m}{k}$.

Données utiles $m = 5{,}00 \times 10^{-3}$ kg ; $g = 9{,}81$ m · s^{-2} ; $k = 7{,}60 \times 10^{-2}$ kg · s^{-1} ; $\alpha = 0{,}906$; $V_L \approx 0{,}59$ m · s^{-1} (3.1)

3.2.a Système {bille}, référentiel terrestre supposé galiléen. Trois forces, toutes verticales :

- le poids $\vec{P}$, vers le bas ;
- la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$, vers le haut ;
- la force de frottement fluide $\vec{F}$, opposée à la vitesse, donc vers le haut.

3.2.b Avec $m = \rho V$: $\vec{P} = \rho V g\,\vec{i}$, $\vec{\Pi} = -\rho' V g\,\vec{i}$, $\vec{F} = -k v\,\vec{i}$.

Deuxième loi de Newton : $\vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{F} = m\,\vec{a}$. En projection sur l'axe Ox, avec $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$:

$$m\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \rho V g - \rho' V g - k v$$

En divisant par m :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{k\,v}{m} + \alpha\,g \qquad \text{avec} \qquad \alpha = \frac{(\rho - \rho')\,V}{m} = 1 - \frac{\rho'}{\rho}$$

3.2.c On dérive la fonction proposée : $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \alpha\,g\,\frac{m}{k} \times \frac{k}{m}\exp\left(-\frac{k}{m}\,t\right) = \alpha\,g\exp\left(-\frac{k}{m}\,t\right)$.

Second membre : $-\frac{k}{m}\,v + \alpha\,g = -\alpha\,g\left[1 - \exp\left(-\frac{k}{m}\,t\right)\right] + \alpha\,g = \alpha\,g\exp\left(-\frac{k}{m}\,t\right)$.

Les deux membres sont égaux à tout instant : la fonction est solution. De plus $v(0) = \alpha\,g\,\frac{m}{k}\,(1 - 1) = 0$: la condition initiale est vérifiée.

PIÈGE
Oublier la poussée d'Archimède ou orienter $\vec{F}$ vers le bas. L'axe pointe vers le bas : le poids se projette avec un signe $+$, les deux autres forces avec un signe $-$.

COMPRENDRE
Toutes les données ont trois chiffres significatifs : les résultats aussi. La valeur lue sur le graphique n'en a que deux, d'où une comparaison à 1 % près seulement.

MÉTHODE
Vitesse limite : inutile de résoudre l'équation, il suffit d'y écrire $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$. La solution redonne le même résultat, car l'exponentielle tend vers 0 quand t devient grand.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$$\frac{0.906 \times 9.81 \times 5.00 \times 10^{-3}}{7.60 \times 10^{-2}} \approx 0.5847276$$

$$\frac{5.00 \times 10^{-3}}{7.60 \times 10^{-2}} \approx 0.06578947$$

3.2.d Quand la vitesse limite est atteinte, v est constante : $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$,
donc $0 = -\dfrac{k\,V_L}{m} + \alpha\,g$, soit $V_L = \dfrac{\alpha\,g\,m}{k}$.

$$V_L = \frac{0{,}906 \times 9{,}81 \times 5{,}00 \times 10^{-3}}{7{,}60 \times 10^{-2}} = 0{,}585\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

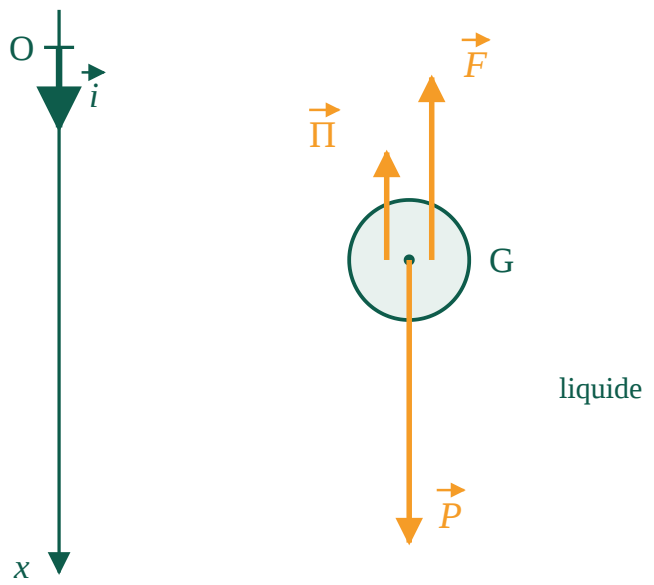
L'écart avec la valeur lue ($0{,}59\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$) est inférieur à 1 % : le modèle est en accord avec l'expérience.

Unité de $\dfrac{m}{k}$: d'après $F = k\,v$, $[k] = \dfrac{[F]}{[v]} = \dfrac{\mathrm{M \cdot L \cdot T^{-2}}}{\mathrm{L \cdot T^{-1}}} = \mathrm{M \cdot T^{-1}}$,
donc $\left[\dfrac{m}{k}\right] = \dfrac{\mathrm{M}}{\mathrm{M \cdot T^{-1}}} = \mathrm{T}$: c'est un temps, en secondes.

$$\frac{m}{k} = \frac{5{,}00 \times 10^{-3}}{7{,}60 \times 10^{-2}} = 6{,}58 \times 10^{-2}\ \mathrm{s}$$

C'est le temps caractéristique τ du régime transitoire : il donne l'ordre de grandeur de la durée nécessaire pour approcher la vitesse limite.

$$V_L = \frac{\alpha\,g\,m}{k} = 0{,}585\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \text{ et } \tau = \frac{m}{k} = 6{,}58 \times 10^{-2}\ \mathrm{s}$$



3.2 · Forces sur la bille pendant la chute (schéma sans échelle ; les trois forces s'appliquent en G, les flèches vers le haut sont décalées pour la lisibilité)

3.3 Par une méthode à expliciter, déterminer sur l'enregistrement le temps caractéristique τ du phénomène. Conclure.

Données utiles $V_L = 0{,}59\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ (3.1) ; $\dfrac{m}{k} = 6{,}58\times10^{-2}$ s (3.2)

D'après la solution, à la date $t = \tau = \dfrac{m}{k}$: $v(\tau) = V_L\,(1 - \text{e}^{-1}) = 0{,}63\,V_L$.

$$v(\tau) = 0{,}63 \times 0{,}59 = 0{,}37\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

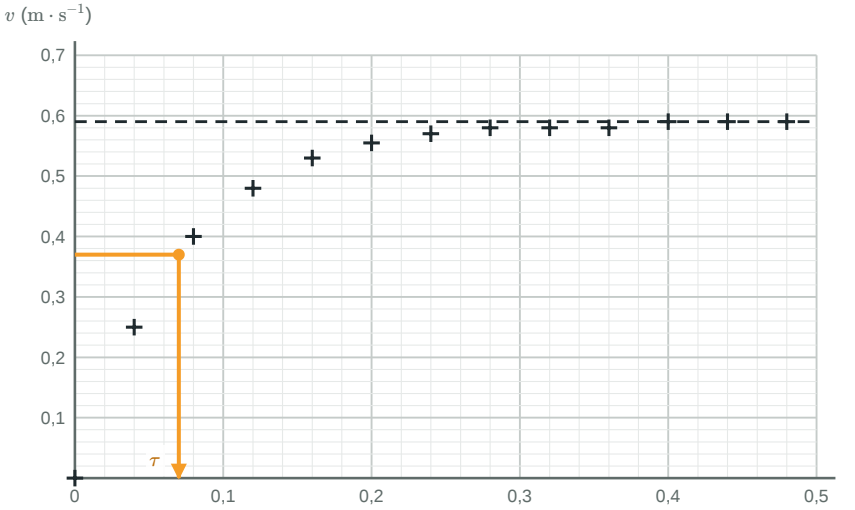
Sur l'enregistrement, on trace l'horizontale d'ordonnée $0{,}37\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$: elle coupe la courbe passant par les points de mesure à l'abscisse $0{,}07$ s.

Conclusion : cette valeur est en accord avec $\dfrac{m}{k} = 0{,}066$ s calculé en 3.2. Le modèle d'un frottement proportionnel à la vitesse décrit bien la chute, et la vitesse limite est pratiquement atteinte au bout de $5\,\tau \approx 0{,}35$ s, comme le montre l'enregistrement.

$\tau \approx 0{,}07$ s, en accord avec $\dfrac{m}{k} = 6{,}58\times10^{-2}$ s

PIÈGE
Annoncer τ avec trois chiffres. Le point cherché tombe entre deux mesures espacées de $0{,}04$ s : la lecture ne garantit qu'un seul chiffre significatif.

MÉTHODE
Autre méthode : la tangente à l'origine coupe l'asymptote $v = V_L$ à la date τ. Elle est moins précise ici, car la pente à l'origine se trace mal avec si peu de points.



3.3 · Enregistrement 1 complété : asymptote $V_L = 0{,}59\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ et lecture de τ à $0{,}63\,V_L = 0{,}37\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

À LA CALCULATRICE

