Pondichéry 2009 EXERCICE 3 Chute d'une bille dans un fluide visqueux (4 points)

Une éprouvette contenant un liquide visqueux sert de support à l'étude de la chute d'une bille d'acier. Le schéma ci-dessous, qui donne une idée du montage, n'est qu'indicatif. En particulier, il ne respecte pas d'échelle et ne peut pas servir de support pour des mesures.

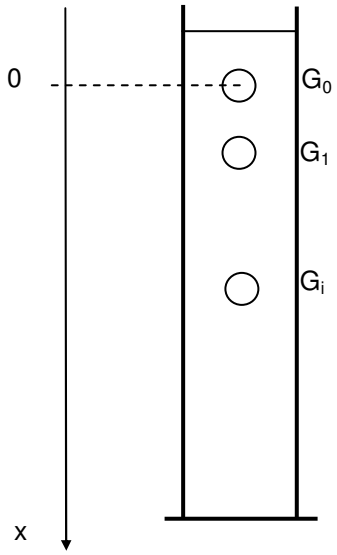


FIGURE 1

La bille, qui constitue le système étudié, est lâchée sans vitesse initiale à l'instant t = 0 (voir figure 1). Au même instant, une acquisition vidéo assurée par une webcam couplée à un ordinateur est déclenchée de manière à enregistrer 25 images par seconde.
La position instantanée x du centre G de la bille est repérée par l'axe vertical orienté vers le bas $\overrightarrow{Ox}$, de vecteur unitaire $\vec{i}$. A t = 0, G est en G_0.
Le vecteur-vitesse de G est noté $\vec{v} = v.\vec{i}$.
La vidéo est ensuite analysée à l'aide d'un logiciel approprié qui permet de repérer aux dates t_i les positions successives x_i de G lors de son mouvement descendant et de calculer approximativement la vitesse moyenne v_i entre les dates t_{i-1} et t_{i+1}.
La détermination des vitesses v_i aux instants t_i donne l'***ENREGISTREMENT 1.***

3.1. Exploitation de l'enregistrement

3.1.a Expliquer comment le logiciel permet de déterminer les vitesses v_i à partir des positions x_i aux instants t_i.

3.1.b Mettre en évidence l'existence d'une vitesse limite v_L dont on donnera la valeur.

3.2. Equation du mouvement

On considère comme système la bille plongée dans le liquide et en mouvement par rapport à celui-ci.

3.2.a Faire le bilan des forces qui s'exercent sur le système. Les représenter sur un schéma.

3.2.b On note m et V la masse et le volume de la bille, ρ et ρ' les masses volumiques respectives de l'acier qui constitue la bille et du liquide dans laquelle celle-ci est plongée. $\overrightarrow{g} = g.\overrightarrow{i}$ est l'accélération de la pesanteur.
On suppose que la force (« résistance ») exercée par le fluide sur la bille en mouvement est de la forme $\overrightarrow{F} = -k.\overrightarrow{v}$, k étant une constante positive.
Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la fonction v(t). Montrer qu'elle est de la forme :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{-k.v}{m} + \alpha.g$$

3.2.c Vérifier que la fonction $v(t) = \alpha.g.\frac{m}{k}.\left[1 - \exp\left(-\frac{k}{m}.t\right)\right]$ est solution de l'équation précédente et vérifie la condition initiale : à t = 0, v = 0.

On prend dorénavant les valeurs suivantes, données dans le système international S.I. :

$m = 5{,}00.10^{-3}$ kg ; $g = 9{,}81$ m.s^{-2} ; $k = 7{,}60.10^{-2}$ kg.s^{-1} ; $\alpha = 0{,}906$.

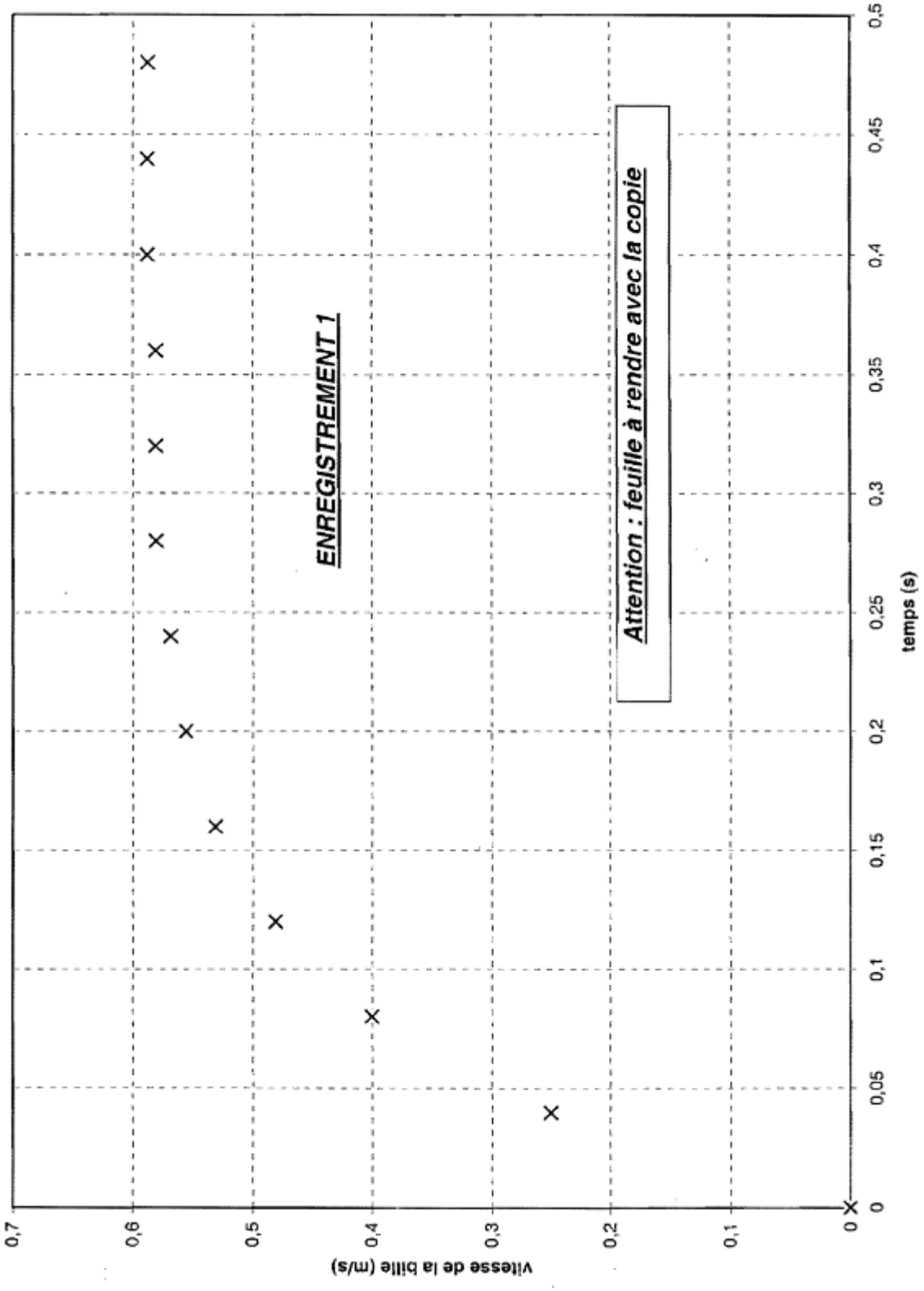
3.2.d Dans l'équation différentielle ou dans l'expression de la solution, mettre en évidence l'existence d'une vitesse limite. Calculer sa valeur et la comparer à celle trouvée en 3.1.b.

Utiliser l'analyse dimensionnelle pour déterminer l'unité de $\frac{m}{k}$.

Calculer numériquement ce rapport.
Quelle interprétation peut-on donner de cette grandeur ?

3.3. Détermination du temps caractéristique sur l'enregistrement

Par une méthode de votre choix et que vous expliciterez, déterminez sur l'enregistrement la valeur du temps τ caractéristique du phénomène. Conclusion.


ENREGISTREMENT 1
Attention : feuille à rendre avec la copie
vitesse de la bille (m/s)
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
0
0,05
0,1
0,15
0,2
0,25
0,3
0,35
0,4
0,45
0,5
temps (s)